

38609/c

N. III. 2

7

1 D (11)

18660

J. Phillips A.M. 1704
St. John's Coll. Cambridge

7/07

19660

EXCERPTA QUÆDAM

E

NEWTONI

Principiis Philosophiæ Naturalis,

CUM NOTIS VARIORUM.

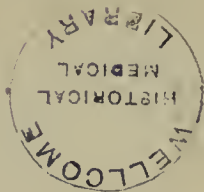
CANTABRIGIÆ:

TYPIS ACADEMICIS EXCUDEBAT J. BENTHAM.

Veneunt apud T. & J. Merrill, et J. Nicholson, Cantabrigiæ; J. Fletcher et D. Prince, Oxoniæ; B. Dod, J. Whiston & B. White, et J. Nourse, Londini; Teggeman, Ebor; Kincaid & Bell, Edinburgiæ; R. & A. Foulis, Glasgiæ; et Gul. Smith, Dublinii.

M.DCC.LXV.

RECEIVED



MEMORANDUM

TO THE SECRETARY OF THE

COMMISSIONER OF THE

THE SECRETARY OF THE
COMMISSIONER OF THE
THE SECRETARY OF THE
COMMISSIONER OF THE

A

LIST of the SUBSCRIBERS.

A

James Adair, Esquire, Soho Square, London
 James Adair jun. Esquire
 William Adair, Esquire
 William Alder, Esquire, Berwick upon Tweed
 John Alderson, Esquire, Cambridge
 Charles Allix, Esquire, Swaffham, Cambridgeshire
 Mr. Allott, Trinity College, Cambridge
 Mr. Arden jun. Trinity College, Cambridge
 Mr. Arnald, St. John's College, Cambridge

B

Reverend Mr. Backhouse, M. A. Fellow of Christ College, Cambridge
 Mr. Tho. Baldwin, B. A. St. Peter's College, Cambridge
 Reverend Mr. Barclay, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Reverend Mr. Barker, M. A. Fellow of Queen's College, Cambridge, 2 Copies
 Mr. Barnes, St. John's College, Cambridge
 Reverend Mr. Barton, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
 Reverend Mr. Bates, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Mr. Bates, B. A. Fellow of King's College, Cambridge
 Reverend Mr. Beadon, M. A. Fellow of St. John's College, Cambridge, and
 Chancellor of St. David's, 2 Copies
 Mr. Beecher, B. A. St. John's College, Cambridge
 Mr. Bell, B. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
 Reverend Mr. Bell, M. A. Fellow of Pembroke-Hall, Cambridge
 Mr. Bennet, Emmanuel College, Cambridge
 Mr. Bennet, Trinity College, Cambridge
 Mr. Bentham, Cambridge
 Library of Berwick upon Tweed
 Mr. Beverly, Christ College Cambridge
 James Bindley, Esquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Reverend Mr. Blackall, Fellow of Emmanuel College
 John Erasmus Blacket, Esquire, Newcastle upon Tyne
 Francis Blake, Esquire, F. R. S.
 Mr. Bond, Caius College, Cambridge
 Samuel Borlase, Esquire
 Reverend William Borlase, B. A. St. Peter's College
 Mr. George Borlase, B. A. St. Peter's College

A LIST of the SUBSCRIBERS.

Reverend Mr. Bowden, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Mr. Brand, Caius College, Cambridge
 Salisbury Brereton, Esquire, F. R. S.
 Mr. Brown, Gentleman Commoner of Hertford College, Oxford
 Ashton Warner Byam, Esquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Reverend Mr. Byrche, M. A. late Fellow of Sidney College, 2 Copies
 Mr. Byron, St. John's College, Cambridge

C

The Honourable Mr. Cornwallis, B. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Count Carburi
 Sir Gervas Clifton, Baronet, Christ College, Cambridge
 Mr. Callamy, Fellow-Commoner of Emmanuel College, Cambridge
 Reverend Mr. Carlos, M. A. Fellow of Caius College, Cambridge
 Reverend Mr. Carr, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
 Mr. Carter, Trinity College, Cambridge
 Mr. Castle, M. A. Caius College
 Henry Bolton Cay, Esquire, Fellow of Clare-Hall
 Thomas Chamberlayne, Esquire, Fellow-Commoner of Clare-Hall, Cambridge
 Mr. Chambers, M. A. Fellow of University College, and Vinerian Law Fellow in the University of Oxford
 Reverend Samuel Chandler, D.D. F. R. S.
 Mr. Chapman, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Reverend Mr. Churchill, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
 Mr. Clowes, Clare-Hall
 Mr. Clubbe, Caius College, Cambridge
 Mr. Cole, Trinity College, Cambridge
 Doctor Collignon, Professor of Anatomy in the University of Cambridge
 Reverend Mr. Colman, M. A. Fellow of Corpus Christi College, Cambridge
 Mr. Isaac Cope, Leek, Staffordshire
 Reverend Mr. Corey, M. A. Fellow of Caius College
 Library of Corpus Christi College, Oxford
 Reverend Mr. Cowper, M. A. Fellow of Corpus Christi College, Cambridge
 Mr. Thomas Crafter, St. John's College, Cambridge
 Mr. Crosley, St. John's College, Cambridge
 Lewis Crusius, D. D. F. R. S. upper Master of the Charterhouse School

D

Reverend Mr. Daker, B. A. Fellow of Magdalen College, Cambridge
 Robert Dale, LL. D. Fellow of Trinity-Hall, Cambridge
 Reverend Mr. Darby, M. A. Fellow of Jesus College, Cambridge
 Mr. John Davenport, Leek, Staffordshire
 Reverend Mr. Davies, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Reverend Mr. Davison, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Mr. Dawson, B. A. Jesus College, Cambridge
 Mr. Dean, St. John's College, Cambridge
 Mr. Disney, St. Peter's College, Cambridge

Richard

A LIST of the SUBSCRIBERS.

v

Richard Hancorn Duppa, Esquire
Mr. Dutens, Queens College, Cambridge

E

Mr. Earl, M. A. Merton College, Oxford
Mr. Eaton, B. A. St. Peter's College, Cambridge
Charles Eggleton, Esquire, Fellow-Commoner of Queen's College, Cambridge
Reverend Mr. Ellison, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend William Elliston, D. D. Master of Sidney College, Cambridge
Reverend Mr. Evans, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge

F

The Honourable Mr. Fitzwilliams, M. A. Trinity-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Farmer, M. A. Fellow of Emmanuel College, Cambridge
William Fauquier, Esquire, F. R. S.
Mr. Foote, Gentleman-Commoner of Hertford College, Oxford
Mr. John Ford
Reverend Mr. Forster, M. A. Fellow of Jesus College, Cambridge
Reverend Thomas Frampton, B. D. Fellow of St. John's College, Cambridge
Mr. Frank, Trinity College, Cambridge

G

The Right Honourable Lord Grey
The Honourable John Grey, M. A. Queen's College, Cambridge
—— Gardner, Esquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Gardner, M. A. Fellow of Catherine-Hall, Cambridge
Mr. Glover, St. John's College, Cambridge
Reverend Peter Stephen Goddard, D. D. Master of Clare-Hall, Cambridge
Mr. Goodenough, M. A. Merton College, Oxford
John Old Goodford, Esq; Fellow-Commoner of Queen's College, Cambridge
Reverend John Gordon, D. D. St. Peter's College, Cambridge
William Gordon, Esquire, Fellow of Queen's College, Cambridge
Samuel William Gordon, Esquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Graham, Trinity College, Cambridge
Mr. Gregory, Magdalen College, Cambridge

H

John Hadley, M. D. F. R. S. late Fellow of Queen's College, and Professor
of Chemistry in the University of Cambridge
Reverend Mr. Hall, B. A. Fellow of St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Hallifax, M. A. Fellow of Lincoln College, Oxford; and
Professor of Divinity at Gresham College
George Hardinge, Esquire, Middle Temple
Reverend John Harris, Vicar of Sturminster-Marshall, Dorsetshire
John Harrison, Esquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge
Mr.

A LIST of the SUBSCRIBERS.

William Heberden, M.D. F.R.S. 6 Copies
 Reverend Mr. Henson, M.A. Fellow of Sidney College, Cambridge
 Mr. Heslop, B. A. Corpus Christi College, Cambridge
 Mr. Hettley, St. John's College, Cambridge
 Reverend Mr. Hey, M. A. Fellow of Sidney College, Cambridge
 Noel Hill, Esquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge
 Doctor Hinckley
 Jacob Hinde, Esquire, Langham-Hall, Essex
 Mr. Hobhouse, M.A. Brazen Nose College, Oxford
 Reverend Mr. Holcombe, M. A. late Fellow of Christ College, Cambridge
 Reverend Mr. Hornsby, M.A. Savillian Professor of Astronomy in the University of Oxford
 Mr. Hudson, Queen's College, Cambridge
 Julius Hutchinson, Esquire, Fellow-Commoner of Sidney College, Cambridge
 John Hyde jun. Esquire, of the Temple

I

Doctor Jebb, Stratford
 Mr. Johnson, Caius College, Cambridge
 Reverend Mr. Jones, Cambridge
 Mr. Jones, B. A. Trinity College, Cambridge
 Mr. Jones, St. Peter's College, Cambridge
 Mr. Ironside, B. A. Fellow of St. John's College, Cambridge
 Mr. Ives, B. A. Caius College, Cambridge

K

Reverend Mr. Keate, B. A. Fellow of King's College, Cambridge
 Reverend Mr. King, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge

L

Mr. Lambert, B. A. Trinity College, Cambridge
 Mr. Law, Christ College, Cambridge
 Reverend John Lawson, B. D. Rector of Swanscombe
 Reverend Mr. Lee, M. A. Fellow of King's College, Cambridge
 Mr. Seymour Leeke, St. Peter's College, Cambridge
 Mr. Charles Le Grice, St. John's College, Cambridge
 Reverend Mr. Leicester, Prebendary of Peterborough
 Charlton Leighton, Esquire, Fellow-Commoner of St. John's College Cambridge
 Reverend Mr. Lloyd, M. A. Fellow of Queen's College, Cambridge
 Mr. John Lloyd, Queen's College, Cambridge
 William Lobb, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Reverend Roger Long, D. D. Master of Pembroke-Hall, and Professor of Astronomy in the University of Cambridge
 Reverend Mr. Longmire, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
 Mr. Lovell, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Reverend Mr. Ludlam, M. A. Fellow of St. John's College, Cambridge

Mr.

A LIST of the SUBSCRIBERS.

vii

M

Mr. Mace, Clare-Hall, Cambridge
Horatio Mann, Esquire, St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Marsh, Rector of Ford, Northumberland
Reverend Mr. Marsh, M.A. Fellow of Queen's College, Cambridge
Mr. Marsh, St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Martyn, M. A. Fellow of Sidney College, and Professor of
Botany in the University of Cambridge
Francis Maseres, Esquire, of the Temple
Lieutenant Colonel Edward Maxwell
Robert Maxwell, Esquire
Reverend Mr. Michell, B. D. F. R. S. late Fellow of Queen's College, and
Woodwardian Professor of Fossils in the University of Cambridge
Reverend Mr. Moises, M. A. Lecturer of All Saints, Newcastle
Mr. Moore, B. A. Trinity College, Cambridge
Reverend Patrick Murdock, D. D. F. R. S.
Reverend Mr. Murhall, M. A. Fellow of Christ College, and Senior Proctor
in the University of Cambridge

N

Mr. Nasmith, Corpus Christi College, Cambridge
Reverend John Newcombe, D.D. late Master of St. John's College, Cambridge,
and Dean of Rochester
Reverend Mr. Newcombe, M. A. Fellow of Hertford College, Oxford
Reverend John Nicols, D. D. Preacher to the Charterhouse, and Prebendary
of Ely

O

The Right Honourable Arthur Onslow, Esquire
George Onslow, Esquire, Member of Parliament for the County of Surry
George Onslow, Esquire, Member of Parliament for Guilford, Surry
Reverend Mr. Oldham, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Oliver, M. A. Fellow of Sidney College, Cambridge

P

Mr. Pawson, St. Peter's College, Cambridge
Mr. Peake, St. John's College, Cambridge
Mr. Pearce, St. John's College, Cambridge
Peter Peirson, Esquire, of the Inner Temple
Andrew Pemberton, Esquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Isaac Pennington, St. John's College, Cambridge
Mr. Penton, Trinity College, Cambridge
Mr. Perrin, Gentleman-Commoner of Christ Church, Oxford.
John Lewis Petit, M. D. F. R. S.
Mr. Pierston, B. A. Jesus College, Cambridge

Mr.

A LIST of the SUBSCRIBERS.

Mr. Popham, Trinity College, Cambridge
 Reverend Mr. Porteus, M. A. late Fellow of Christ College, Cambridge
 William Post, Esquire, Fellow of Queen's College, Cambridge
 Mr. Preston, B. A. Queen's College, Cambridge
 Samuel Provost, Esquire, Fellow-Commoner of St. Peter's College, Cambridge
 Reverend Mr. Purkis, Fellow of Magdalen College, Cambridge

R

Mr. Rawlinson, Queen's College, Cambridge
 Mr. Rayner, B. A. Caius College, Cambridge
 Edward Reeve, Esquire, Lincoln's Inn
 Mr. Richmond, B. A. Trinity College, Cambridge
 Reverend William Ridlington, LL. D. Fellow of Trinity-Hall, and Professor
 of Law in the University of Cambridge
 Mr. Rooke, Trinity College, Cambridge
 Mr. Rudd, St. John's College, Cambridge
 Mr. Thomas Ruggles, Fellow-Commoner of Sidney College Cambridge
 Reverend Mr. Ruffel, M. A. Fellow of Corpus Christi College, Oxford

S

The Right Honourable the Countess of Stamford
 Reverend Samuel Salter, D. D. Master of the Charterhouse
 Mr. Scaife, Trinity College, Cambridge
 Reverend Mr. Shepherd, B. D. Fellow of Christ College, Plumian Professor
 of Astronomy and Experimental Philosophy in the University of Cam-
 bridge, and F. R. S.
 John Simpson, Esquire, Newcastle upon Tyne
 Reverend John Smith, D. D. Master of Caius College, Cambridge
 John Smith, Esquire, Fellow-Commoner of Magdalen College, Cambridge
 Mr. Smyth, B. A. Clare-Hall, Cambridge
 Mr. Spry, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
 Reverend William Steggall, M. A. Rector of Wyverston, Suffolk
 Reverend Mr. Stevens, M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge
 Reverend Mr. Stoddart, B. A. Christ College, Cambridge
 Mr. Swale, B. A. St. John's College, Cambridge

T

The Honourable Thomas Townshend, Member of Parliament for the Univer-
 sity of Cambridge
 Mr. Taylor, Queen's College, Cambridge
 Reverend Mr. Tew, M. A. Fellow of King's College, Cambridge
 Reverend Thomas Thorp, M. A. Vicar of Berwick upon Tweed
 Mr. Robert Thorp, Newcastle upon Tyne
 Mr. Tildyard, Fellow-Commoner of Caius College, Cambridge
 Reverend Mr. Trevigar
 Mr. Travis B. A. St. John's College, Cambridge

Reverend

A LIST of the SUBSCRIBERS.

ix

Reverend Mr. Tucker, M. A. Canterbury
Reverend Mr. Turner, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Turner, M. A. Fellow of Emmanuel College, Cambridge
Mr. Turner, Pembroke-Hall, Cambridge
Mr. Tyson, B. A. Corpus Christi College, Cambridge

W

Mr. Waddington, Clare-Hall, Cambridge
Mr. Ward, B. A. St. John's College, Cambridge
Mr. Ward, Christ College, Cambridge
Edward Waring, M. A. Fellow of Magdalen College, Lucasian Professor of Mathematics in the University of Cambridge, and F. R. S.
Reverend Mr. Watson, M. A. Fellow of Trinity College, and Professor of Chemistry in the University of Cambridge
Mr. Watson, Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Weston, M. A. Fellow of Magdalen College, Oxford
Reverend Mr. Wheeler, M. A. Fellow of Magdalen College, Oxford
Mr. John White, B. A. Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Henry Whitfield, Fellow of Pembroke-Hall, Cambridge
John Wilson, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Wilson, Christ College, Cambridge
Mr. Wilson, Pembroke-Hall, Cambridge
Mr. Wise, St. John's College, Cambridge
Francis Wollaston, Esquire, F. R. S. 4 Copies
Reverend Francis Wollaston, LL. B. Rector of East Dereham, Norfolk
George Woodd, Esquire, Richmond in Surry
Mr. Woodhouse, Emmanuel College, Cambridge
Ralph Wormley, Esquire, Fellow-Commoner of Trinity-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Wynter, B. A. Fellow of Sidney College, Cambridge
Reverend Mr. Wyvill, LL. B. Queen's College, Cambridge

Y

The Honourable John Yorke, Esquire
The Honourable and Reverend James York, Dean of Lincoln

Z

Reverend Mr. Zouch, M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge.

CORRIGENDA.

PAG. 11. l. 27. pro *augeantur numero et magnitudine, diminuantur &c.* lege *augeantur numero, et magnitudine diminuantur.* Pag. 21. l. ult. pro *Bd*, lege *BD*. Pag. 24. l. 20. pro *Dc*, lege *DC*: l. 21. pro *puncti a*, lege *puncti Q*: l. 23. pro *Dc*, lege *dc*: l. 25. pro *Dc*, lege *dc*: l. 26. pro *DcbA*, lege *DCbA*. Pag. 25. l. 26. pro *Bk*, lege *BK*. Pag. 26. l. 33. pro *AIg*, lege *AI*. Pag. 34. l. 26. pro *Bv*, lege *Bu*. Pag. 80. l. 19. deest *. Pag. 88. l. 21. pro *ob*, lege *ab*. Pag. 89. l. 26. pro *hypotheses*, lege *hypothesein*. Pag. 90. l. 30. pro *gravitationum*, lege *gravitationis*. Pag. 102. l. 4. pro *planetos*, lege *planetas*. Pag. 121. l. 33. pro *Prop. IV*, lege *Prop. VI*. Pag. 150. l. 36. pro *syzygias*, lege *syzygiis*. Pag. 153. l. 29. pro *oētantantibus*, lege *oētantibus*. Pag. 161. l. 17. et 18. pro *signentibus*, lege *sequentibus*. Pag. 165. l. 34. pro *ineund*, lege *ineundo*.

NEWTONI
PRINCIPIA
PHILOSOPHIÆ NATURALIS.

DEFINITIONES.

1. *Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim.*
2. *Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.*
3. *Materiæ vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*
4. *Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*
5. *Vis centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.*

A

6. *Vis*

6. *Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*
7. *Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*
8. *Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.*

Hasce virium quantitates brevitatis gratiâ nominare licet vires motrices, acceleratrices, et absolutas; et distinctionis gratiâ referre ad Corpora centrum petentia, ad corporum Loca, et ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; et vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum tanquam causâ aliquâ præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas et sedes Physicas jam non expendo.

AXIO-

A X I O M A T A,

S I V E

L E G E S M O T U S.

AXIOMATA,
SIVE
LEGES
MOTUS.

I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

II.

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimi-
tur.*

III.

Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi fola M in loco A impressa, ferretur uniformi cum motu ab A ad B ; et vi fola N in eodem loco impressa, ferretur ab A ad C : compleatur parallelogrammum $ABDC$, et vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab

TAB. I.
Fig. I.

AXIOMATA,
SIVE

A ad D . Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD , five vis N imprimatur, five non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD . Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD , et idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per legem I.

COROLLARIUM II.

TAB. I.
Fig. 1.

Et hinc patet compositio vis directæ AD ex viribus quibusvis obliquis AB et BD, et vicissim resolutio vis cujuscunque directæ AD in obliquas quascunque AB et BD. Quæ quidem compositio et resolutio abunde confirmatur ex mechanica.

TAB. I.
Fig. 2.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales OM , ON filis MA , NP sustineant pondera A et P , et quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta KOL filis perpendiculariter occurrens in K et L , centroque O et intervallorum OK , OL majore OL , describatur circulus occurrens filo MA in D : et actæ rectæ OD parallella sit AC , et perpendicularis DC . Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta K , L , D affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis K et L vel D et L . Ponderis autem A exponatur vis tota per lineam AD , et hæc resolvetur in vires AC , CD , quarum AC trahendo radium OD directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC , trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet, ac si perpendiculariter traheret radium OL ipsi OD æqualem; hoc est, idem atque pondus P , si modo pondus illud sit ad pondus A ut vis DC ad vim DA , id est (ob similia triangula ADC , DOK ,) ut OK ad OD seu OL . Pondera igitur A et P , quæ sunt reciproce ut radii in directum positi OK et OL , idem pollebunt,

et sic consistent in æquilibrio : quæ est proprietas notissima libræ, vectis, et axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np , partim incumbat plano obliquo pG : agantur pH , NH , prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis; et si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH , resolvi potest hæc in vires pN , HN . Si filo pN perpendicularare esset planum aliquod pQ , secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; et pondus p his planis pQ , pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN , HN , perpendiculariter nimirum planum pQ vi pN , et planum pG , vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi pN , qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH . Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione, quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN , AM a centro rotæ, et ratione directâ pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: et inde vires cunei et mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum pQ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH ; atque ad vim, qua urget planum alterum pG , ut pN ad NH . Sed et vis cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur corollarii hujus latissime patet, et late patendo veritatem ejus evincit; cum pendeat ex jam dictis mechanica tota ab auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tensis et pon-

de-

AXIOMATA,
SIVE

deribus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis mechanicis componi solent, ut et vires tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per legem III, ideoque per legem II. æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

[^a] Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, et distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel

TAB. I.
Fig. 3.

[^a] 1. Si rectæ duæ positione datæ AC , BD ad data puncta A , B , terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta CD , quâ puncta indeterminata C , D , junguntur, fecetur in ratione datâ in K : dico quod punctum K locabitur in rectâ positione datâ.

Concurrant enim rectæ AC , BD in E , et in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC , sitque FD semper æqualis datæ EG ; et erit ex constructione

vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter et commune centrum horum duorum et tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum et centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo et commune centrum horum trium et quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium et centrum quarti in data ratione, et sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiae centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorum-

vis

tione EC ad GD , hoc est, ad EF ut AC ad BD , ideoque in ratione datâ, et propterea dabitur specie triangulum EFC . Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD ; et ob datam illam rationem dabitur etiam specie triangulum EFL ; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK , et similia erunt triangula CLK , CFD ; et ob datam FD et datam rationem LK ad FD dabitur LK . Huic æqualis capiatur EH , et erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK . Q.E.D.

Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF , EL , et EC , id est GD , HK , et EC datas habent rationes ad invicem.

Eâdem ratione demonstrari potest si motus punctorum C et D non fiant in eodem plano.

AXIOMATA,
SIVE

vis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; et reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum et quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se, vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; et propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, et summæ tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) et ex his summis vel differentiis oriuntur congressus et impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congressuum effectus in utroque casu;

casu; et propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in navi, five ea quiescat, five moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, et à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitibus movendorum corporum) et secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones et motus eorum inter se.

SECTIO I.

*De methodo Rationum primarum et ultimarum, cujus ope
sequentia demonstrantur.*

PROOEMIUM.

*De methodo Exhaustionum. — De methodo Indivisibilium. — De metho-
do Rationum primarum et ultimarum. — De accomodatione me-
thodi Rationum primarum et ultimarum ad inventionem virium cen-
tripetarum.*

Datae propositionis veritatem sæpissimè per methodos diversas stabilire conceditur. Eminent vero inter alias illa demonstrationis forma, quam directam nominare licet: in quâ nimirum, ope axiomatum quorundam simplicissimorum, vel theorematum quæ antea demonstrata sunt, ad propositionis ipsius cognitionem, nullâ circuitione factâ, perducimur.

Quoniam vero hominum solertia nequit in omni casu ideas illas intermedias quibus extremæ connectuntur investigare, sæpissimè invenimus geometras permultos præstantissimam hanc veritatem eliciendi rationem invitos sane declinare, atque ratiocinia ex absurdo in scriptis suis passim usurpare. Quandoque enim aditus ad veritatem immediate perducens vel patebat nullus, vel difficilis ac confragosus, hypothesin omnem quam quis excogitare potuit diluendo, præter illam quam stabilire et confirmare voluerunt, ex falsis suppositionibus verum tandem eruebant. Hâc demonstrationis formâ sæpissimè stabilitur veritas propositionum simplicissimarum ad figuras rectilineas spectantium. Propositiones vero quæ spectant ad figuras curvilineas deteguntur, vel immediatâ comparatione legum quibus generantur, vel ope figurarum rectilinearum, inter quas et curvilineas intercedit data relatio: hæ vero relationes investigari nequeunt immediatâ comparatione figurarum, quæ in modo generationis sunt prorsus dissimiles; et consulitur perspicuitati et evidentiae geometricæ, si ex receptis et concessis figurarum rectilinearum proprietatibus ad curvilineas liceat immediatè transire. Necessariò igitur oritur hujusce methodi frequentior usus in investigandis figurarum proprietatibus, si curvilinearum relationes ex iisdem principiis cum eâdem simplicitate et evidentia determinare vellemus. Cum spatia rectilinea inter se conferenda sunt, ut magnitudines eorum patefiant, methodus primaria ea est quâ utitur Euclides in Elem. i. 4. ubi triangulum triangulo superponi intelligitur, quamque applicat in omni aliâ comparatione spatiorum rectilinearum inter se. Cum autem spatia curvilinea cum rectilineis vel inter se conferenda sunt, propter geneseos legem diversam, eadem methodus applicari nequit. Hinc alio ratiocinati sunt modo veteres geometræ, methodumque exhaustionum invenerunt. Secundum hanc inscribere et circumscribere solebant spatia rectilinea spatio curvilineo quidem inæqualia, eâ vero lege variata, ut, si assumatur data quævis quantitas, differentia eorum

rum ita minuetur, ut fiat hæc quantitate minor: et tandem, inveniendo absurditatem quandam sequi si spatia quæ comparabant majora vel minora aliud alio fingerentur, æqualia esse concludebant.

SECTIO
PRIMA.

Exempli gratiâ: Probaturus Archimedes aream circuli æqualem esse areæ trianguli, cujus basis est circuli peripheria, et altitudo semidiameter, polygonum ABC circulo circumscribit; probatque, aucto laterum polygoni numero, tale tandem descriptum fore polygonum, quod circulum minus quàm pro minimâ assignabili differentiâ exsuperabit: patet igitur, triangulum DEF , cujus basis EF est circuli peripheria, et cujus altitudo DE circuli radius, circulo non esse majus: si enim majus esset, polygonum circulo circumscribere liceret triangulo illo minus: cum vero polygoni peripheria major sit peripheriâ circuli, polygoni area aream trianguli necessariò exsuperabit; area enim polygoni æqualis est areæ trianguli cujus basis est polygoni peripheria, et altitudo circuli radius, ideoque triangulum DEF circulo majus esse nequit. — Rursus polygonum aliud in circulo eodem inscribendo, et comparando aream ejus cum trianguli prædicti areâ, eodem probat argumento trianguli aream circuli areâ minorem non esse; et ex præmissis concludit, triangulum DEF , cum neque majus neque minus sit circulo, ei æquale esse.

TAB. I.
FIG. 4.

Ut vero clarius innotescat quomodo veteres geometræ à notis proportionibus figurarum rectilinearum curvilineas inter se comparabant, aliud jam exemplum methodo exhaustionum demonstratum trademus. — Expriment lineæ AB , AD areas duorum circulorum, et AP , AQ similia polygonum in his circulis inscripta: bisectionis perpetuò circulorum arcubus à lateribus polygonorum subtensis, areæ polygonorum propius ad areas circulorum accedent quàm pro datâ quâvis differentiâ; et eandem rationem, quam habent polygonum inter se, habebunt etiam circuli. Nam, si negas, sit AP ad AQ ut AB ad AE , quæ minor est quàm AD : augeantur numero, et magnitudine, diminuantur latera polygoni AQ , donec differentia inter aream ejus et aream circuli AD minor fuerit quàm ED (quod fieri potest per Elem. x. 1.) sit hæc differentia qD , et exprimeatur polygonum in circulo AD per Aq ; sitque Ap polygonum simile in circulo AB : quoniam est $AP : AQ :: AB : AE$ [per hyp.] et polygonum Ap ad simile Aq , ut AP ad AQ ; erit $AB : AE :: Ap : Aq$; quoniam igitur circulus AB major est quàm polygonum inscriptum Ap , erit AE major quàm Aq ; per hypothesein autem Aq major est quàm AE ; ergo, his duobus inter se repugnantibus, sequitur polygonum AP non esse ad polygonum AQ ut circulus AB ad quantitatem AE quæ minor est quàm circulus AD : ob eandem causam AQ non est ad AP ut AD ad AF minorem quàm AB . Exinde etiam sequitur, non esse AP ad AQ ut AB ad quantitatem Ae quæ major est quàm AD ; nam si AF sit ad AB ut AD ad Ae , erit AP ad AQ , ut AF , quæ minor est quàm AB , ad AD , quod contradicit jam demonstratis: quoniam igitur AP non est ad AQ ut AB ad quantitatem minorem vel majorem quàm AD , sequitur, circulos AB et AD eandem inter se rationem habere quam habent similia polygonum inscripta AP et AQ .

TAB. I.
FIG. 5.

SECTIO
PRIMA.

Ex hâc argumentandi ratione patet universaliter veritas propositionis, cuius ope omnia huiusce generis theoremata demonstrari possunt; nempe, si duæ variabiles quantitates AP , AQ ; invariabilem semper rationem inter se habentes, accedant ad fixas quantitates AB , AD propius quàm pro datâ quâvis differentiâ, ratio limitum AB , AD eadem est ac invariabilis ratio quantitatum AP , AQ .

Hâc methodo propter tœdium improbatâ, superioris ævi geometræ aliam, cui nomen indivisibilium methodus impositum est, excogitarunt. Attamen principia quibus innititur hæc argumentandi ratio a fautoribus ejus duriora esse conceduntur; atque alii, dum ipsas quæ assumuntur hypotheses captum humanum superare affirmant, huiusce methodi inventores iter sane ad veritatem corripuisse, vires vero demonstrationis mathematicæ infirmasse, judicaverunt. Sequuntur huiusce generis ratiocinandi exempla quædam à clarissimo Wallisio desumpta.

TAB. I.
FIG. 6.

Considerantur lineæ ex innumeris punctis constare, superficies ex lineis, et solida ex superficiebus; vel forsan circulus ex innumeris sectoribus, sphaera ex pyramidibus, et sic in cæteris: et in computandis magnitudinum rationibus secundum hanc methodum, computanda est summa omnium indivisibilium elementorum, ex quibus superficies vel solida accuratè componi supponuntur. Exempli gratiâ: Supponatur parabola $APBB$ constare ex lineis quarum una est PP , inscriptum triangulum, et circumscriptum parallelogrammum ex æquali numero linearum TT , CC : probando summam omnium linearum PP in parabolâ esse ad summam omnium TT in triangulo ut 4 ad 3, et ad summam omnium CC in parallelogrammo ut 2 ad 3, concludunt, aream parabolæ esse ad aream trianguli ut 4 ad 3, et ad aream parallelogrammi ut 2 ad 3. Simili modo ad solida applicatur methodus: supponantur enim parabolis, inscriptus conus, et circumscriptus cylindrus ex circulis PP , TT , CC constare, et si probetur summam circulorum PP esse ad summam TT ut 3 ad 2, et ad summam CC ut 3 ad 6, concludunt solida esse in eadem proportionem.

TAB. I.
FIG. 7.

Methodus hæc ratiocinandi, modo cautè applicetur, satis demonstrativa esse jure habetur; ut ex demonstratione celeberrimæ illius propositionis Archimedis abunde confirmatur; — nempe, sphaeram esse ad cylindrum inscriptum ut 2 ad 3. Secentur cylindrus, hemisphaerium, et conus ejusdem basis et altitudinis, planis ad basim parallelis, quorum unum est $CSKDC$: quoniam $SO^2 = CD^2 = SD^2 + DO^2 = SD^2 + DK^2$; et quoniam circuli, quorum hæ lineæ sunt semidiametri, sunt ut earum quadrata; sequitur, summam omnium circulorum in cylindro æqualem esse summæ omnium circulorum in hemisphaerio, unâ cum summâ omnium in cono: ipse igitur cylindrus, qui ex his circulis componi supponitur, æqualis erit hemisphaerio et cono simul sumptis: conus autem est tertia pars cylindri; ergo, hoc sublato, manet hemisphaerium ad cylindrum ut 2 ad 3.

Quàm cautè vero applicanda est hæc methodus ex sequentibus exemplis patebit. Si circulus consideretur tanquam polygonum cujus latera in infinitum diminuuntur, et proinde arcus minimus cum chordâ ejus perfectè coincidere

dere supponatur, sequitur, tempus vibrationis penduli in hoc arcu esse æquale tempori descensûs per chordam ejus: ex mechanicis vero patet, quòd ratio hæc, si accuratè assignari possit, sit ratio quadrantis circuli ad diametrum. Neque aliter solvi potest hæc difficultas, ni recurratur ad indivisibilia elementa prioribus infinitè minora.

Aliter. Si corpus a quiete decidat uniformi vi gravitatis agitaturn, et tempus descensûs ejus dividi concipiatur in infinitè parva momenta, quæ per indivisibiles partes *ab*, *bc*, *cd* lineæ *an* exprimuntur; et si velocitates sint in his momentis uniformes, et per lineas *bp*, *cq*, *dm* representatæ, spatia descripta rectè exprimentur per rectangula, *ap*, *bq*, *cm*; in duobus igitur momentis secundum hanc methodum tria describuntur æqualia rectangula, in tribus sex, et sic deinceps: spatia autem descripta revera sunt ut quadrata temporum; in duobus igitur momentis deficit quarta pars spatii, in tribus tertia pars, &c.

TAB. I.
FIG. 8.

Etiam si exhaustionum methodus, quâ usi sunt veteres in theorematis suis difficilioribus investigandis atque demonstrandis, principiis innitatur quæ et ratio et bis mille annorum autoritas et usus confirmarant; tamen hæc demonstrationis forma, quæ forsan auctori nostro celeberrimo propterevidentiam ejus exploratam multum arrideret, ob longas ambages atque obliquam veritatis investigandæ rationem vehementer displicuit. Majoribus vero molestiis se urgeri per sentit, si indivisibilium doctrinam ad theoremata sua stabilienda converteret. Etenim ipse conceptus quantitatum illis quæ sensibus offeruntur infinitè minorum videtur esse perdifficilis; nec ratiociniis inde deductis conceditur fides omnium consensu stabilita. Newtonus igitur, theoremata illa præclara, quorum veritas lemmatum sequentium ope deducitur, demonstrationis formâ confirmare, ut aliquibus placet, antea inauditâ, non indignum judicavit: quæ à nobis sane restat explicanda, atque eâ ratione illustranda, ut simul eluceant et hujusce methodi perspicuitas, et evidentia, atque ad sequentia accommodatio.

Supponuntur magnitudines non ex partibus indivisibilibus constare, sed motu perpetuo generari: *Lineæ nempe describuntur, ac describendo generantur, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, et sic in cæteris. Hæ geneses in rerum naturâ locum verè habent, et in motu corporum quotidie cernuntur.* Ex finitis igitur magnitudinum hoc modo genitarum incrementis vel decrementis, quæruntur primæ vel ultimæ rationes, quibuscum magnitudines ipsæ nascuntur, vel evanescent, vel etiam in infinitum augentur. Hæ vero rationes primæ vel ultimæ investigantur observando limites rationum, quæ inter variables magnitudines obtinent, dum finitæ sunt; limites nempe eos ad quos magnitudinum rationes perpetuò accedunt, quos nunquam transgredi, neque etiam attingere possunt, sed ad quos propius accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ. Ultimæ igitur rationes magnitudinum evanescentium, et primæ nascentium, non sunt rationes quas magnitudines ipsæ unquam inter se habent, sed limites omnium variabilium rationum.

Li-

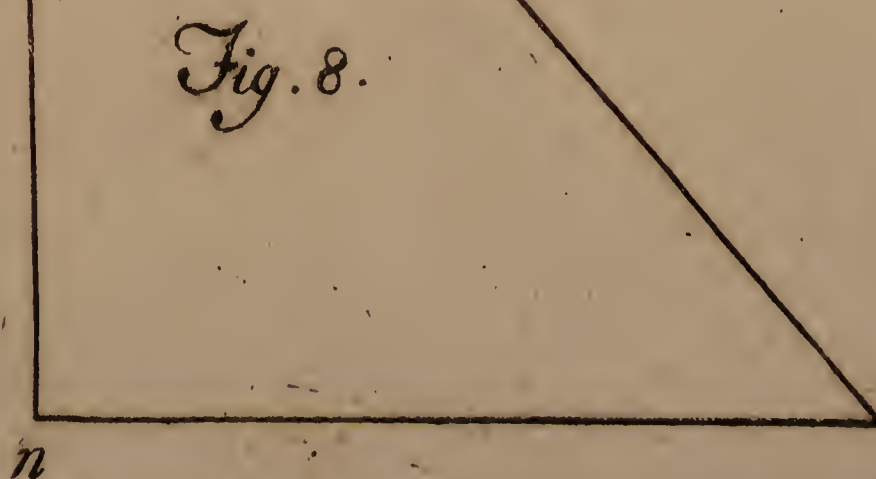
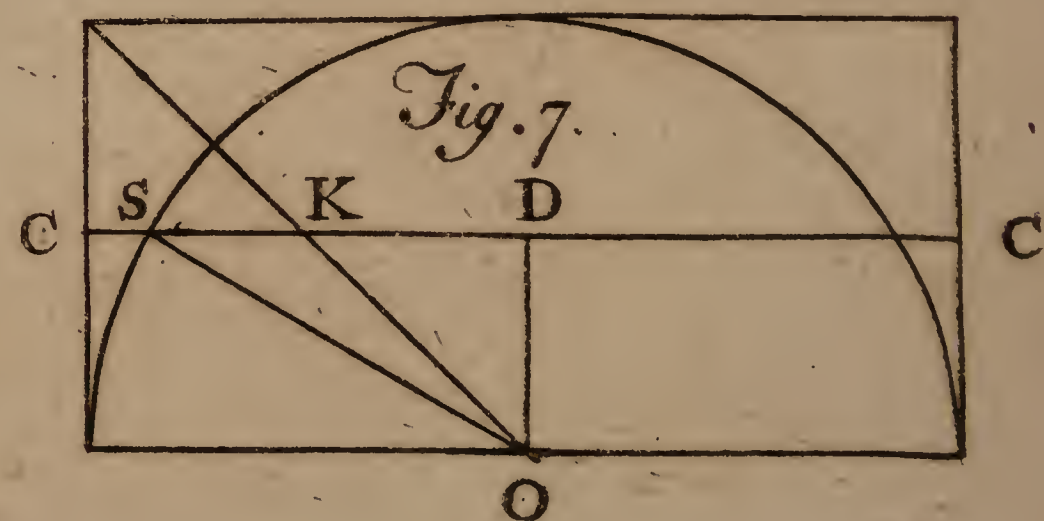
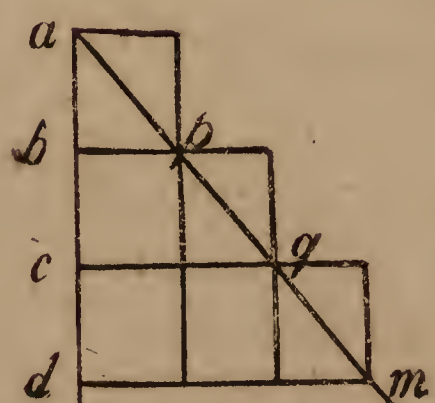
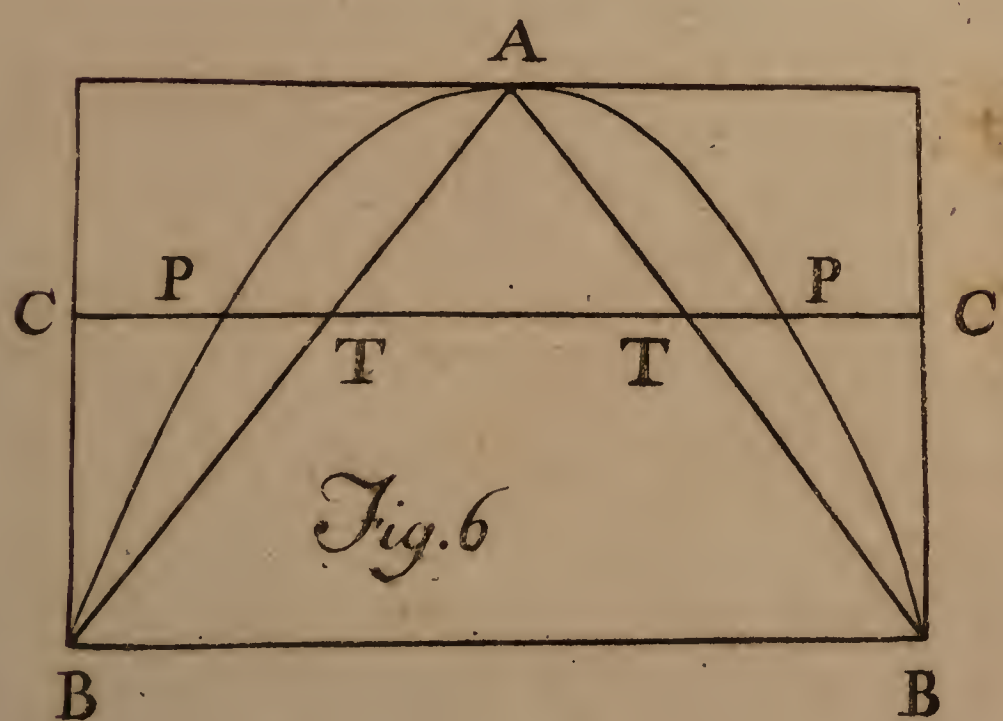
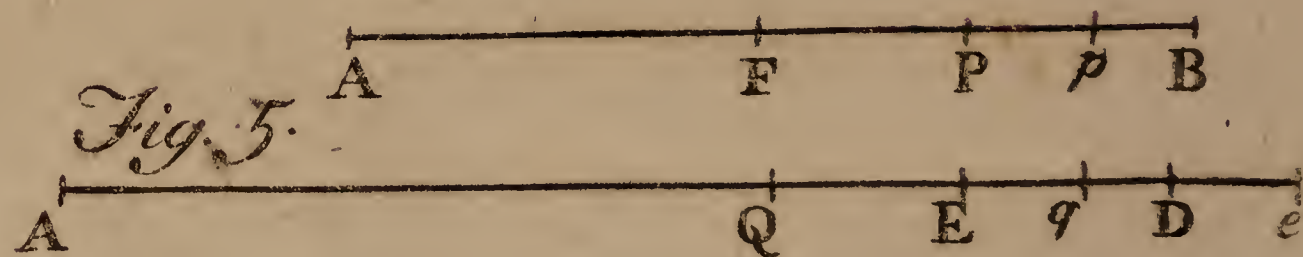
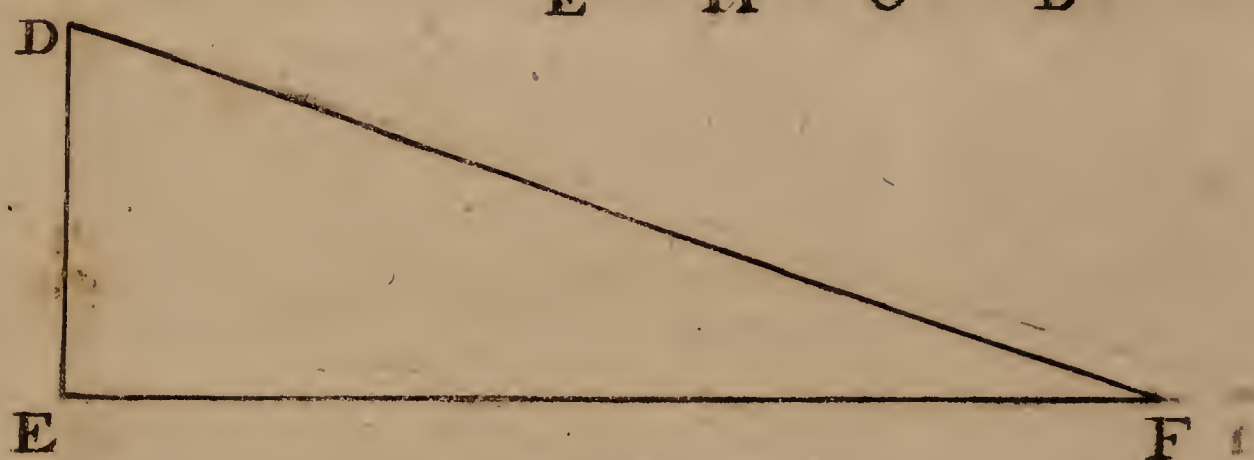
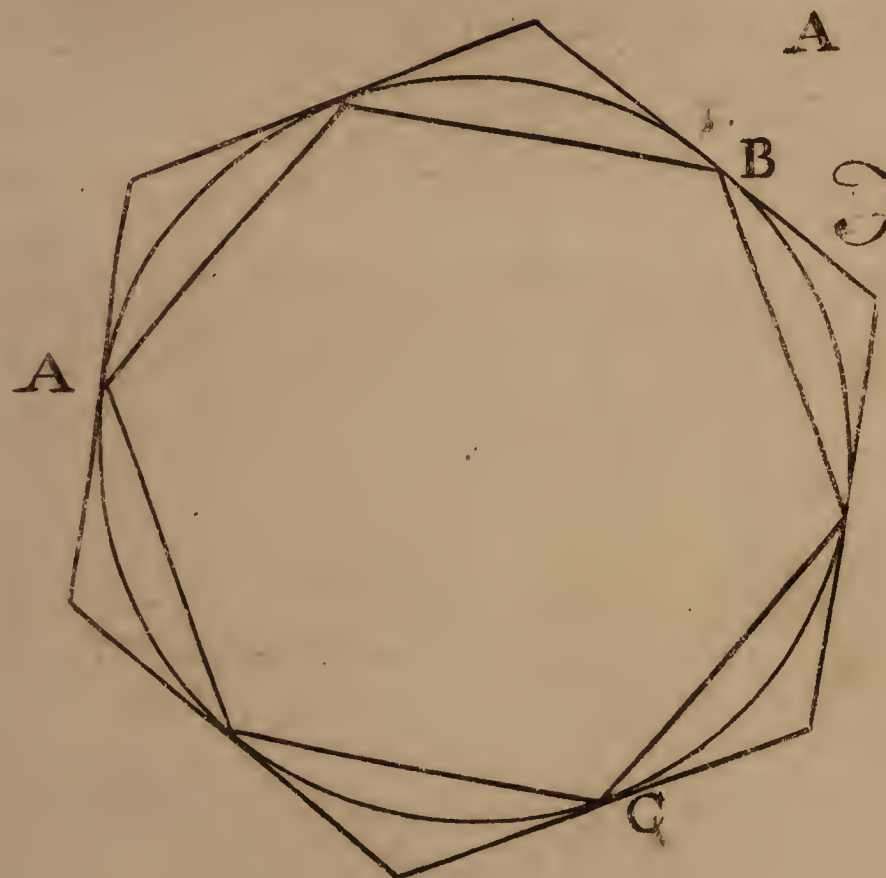
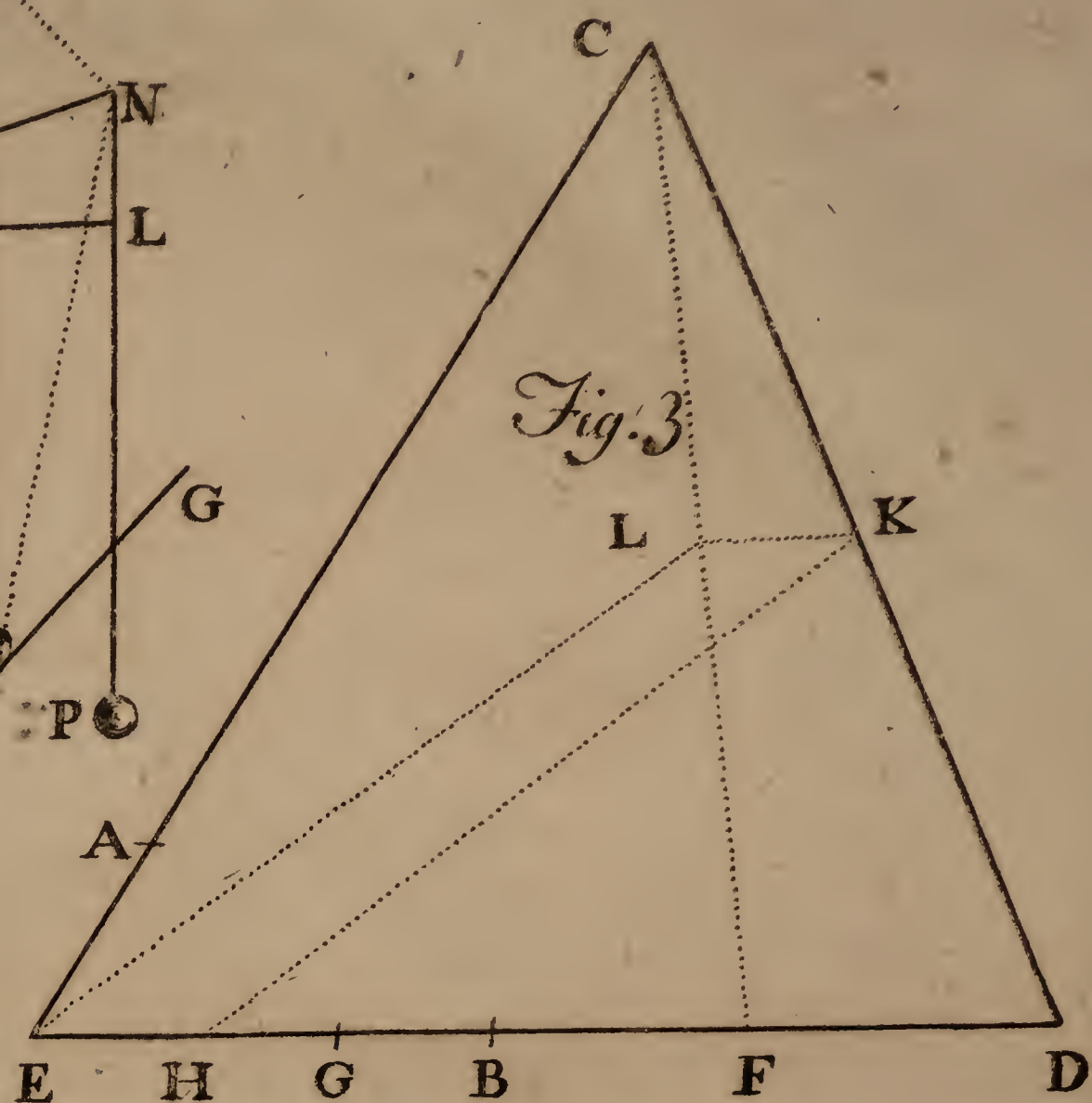
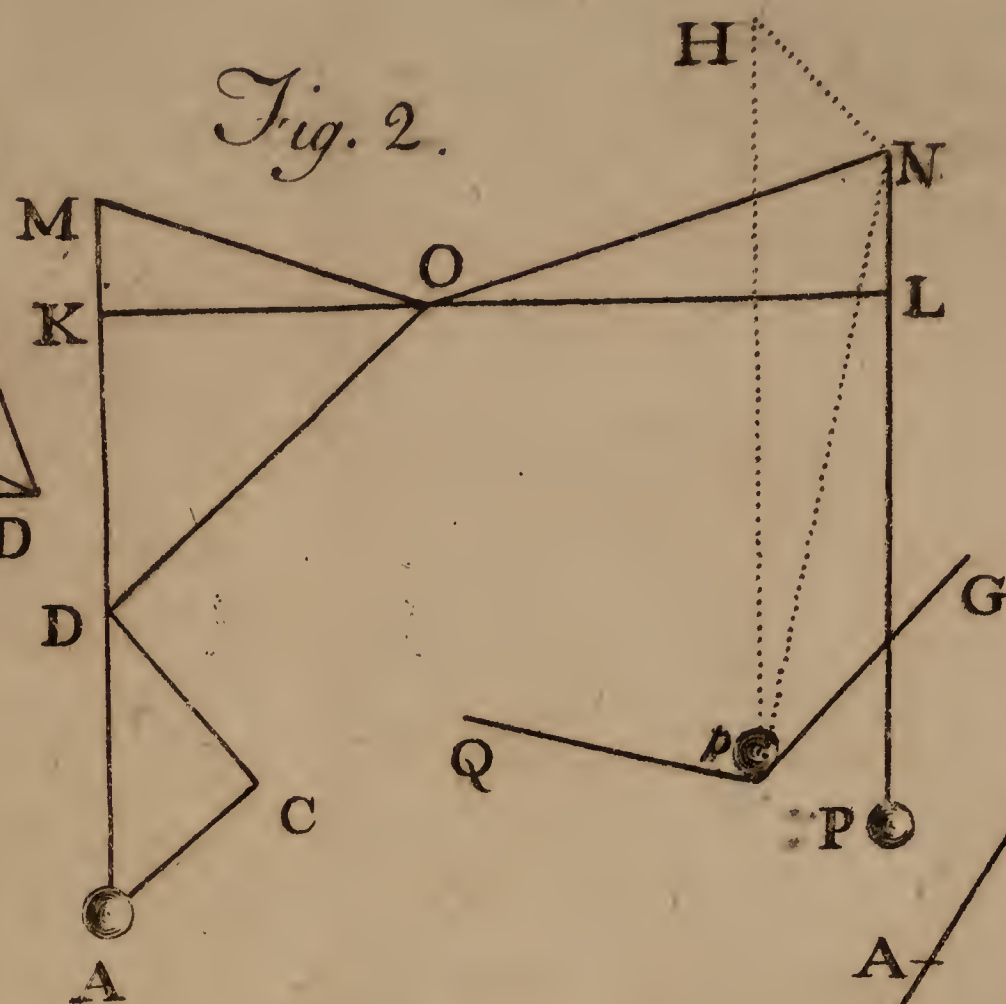
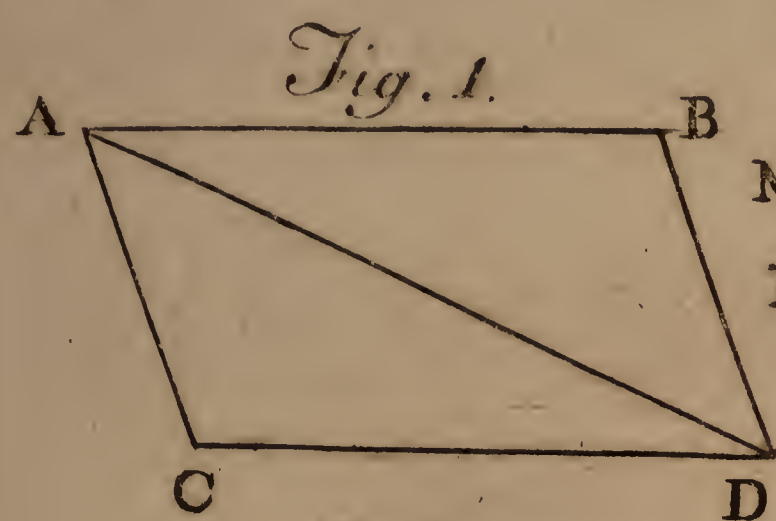
SECTIO
PRIMA.

Limites omnium variabilium rationum facillimè investigantur reducendo quantitates, quibus generaliter rationes illæ exprimuntur, in terminos quorum pars una ex variabili parte minime pendet; et supponendo variabilem illam partem vel evanescere, vel in infinitum augeri. Exempli gratiâ: Sint duæ quantitates $ax^n + bx^{n-1}$ et $cx^n + dx^{n-1}$ variabiles propter variabilem x ; dividendo per x^{n-1} reducitur ratio hæc ad rationem $ax + b$ ad $cx + d$: evanescat x , et fit $ax + b : cx + d :: b : d$; augeatur x in infinitum, et fit $ax + b : cx + d$ (vel $a + \frac{b}{x} : c + \frac{d}{x}$) :: $a : c$. Rationes igitur b ad d , et a ad c sunt limites omnium variabilium rationum, quæ obtinent inter quantitates $ax^n + bx^{n-1}$ et $cx^n + dx^{n-1}$ dum diminuitur vel augetur valor quantitatis x ; quos tamen nunquam transgrediuntur, neque attingunt dum x finita est; sed ad quos propius accedere possunt quàm pro datâ quâvis differentiâ.

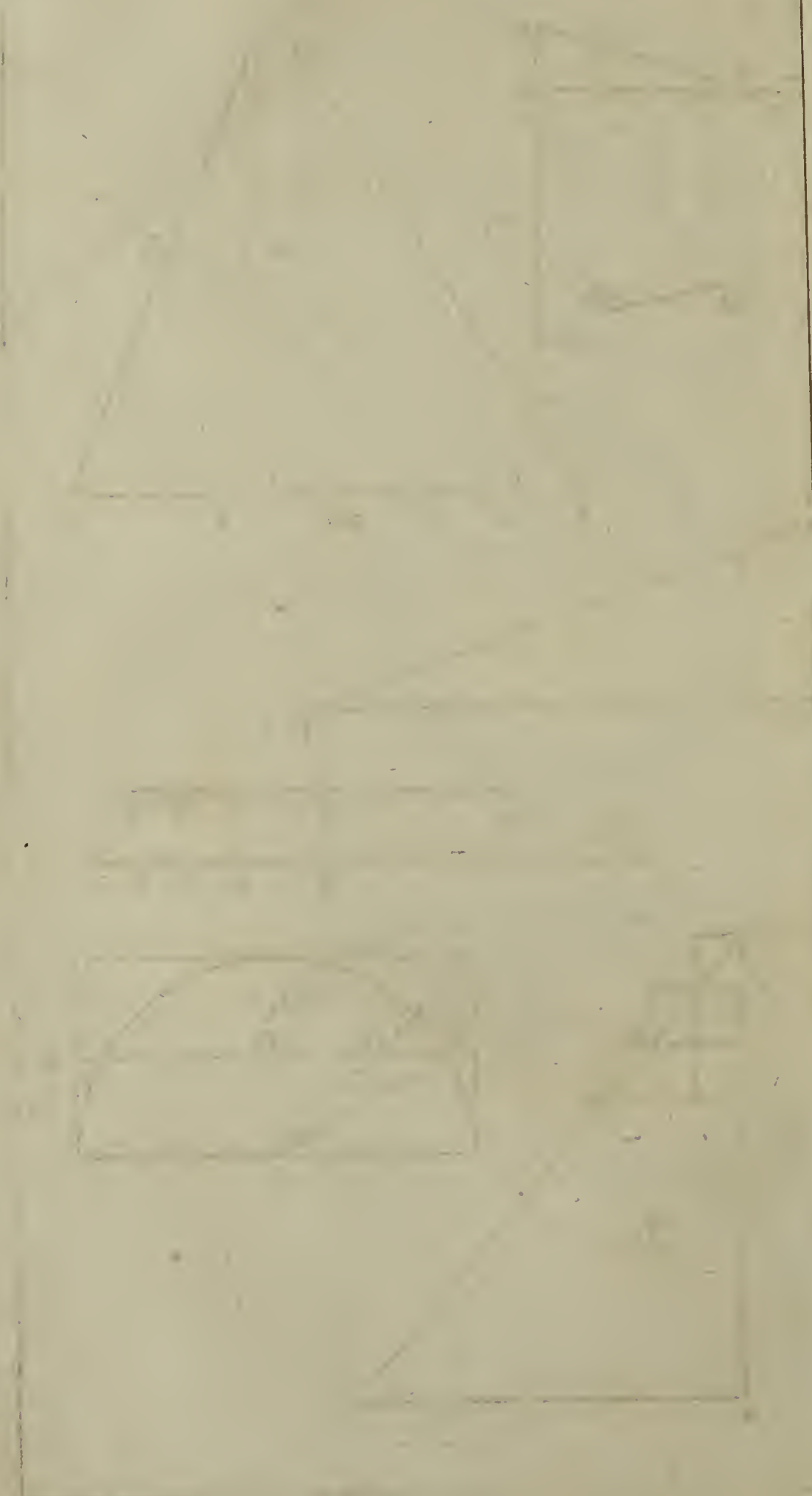
Restat ut priusquam huic procæmio finem imponamus, de accommodatione hujusce methodi ad virium centripetarum et centrifugarum theoriam perpauca subjungamus.

Rationes, quas inter se habent ideæ spatii, temporis, velocitatis et vis, respectu ad earum quantitates vel gradus, exprimi possunt vel per notas in arte analytica usurpatas, vel per varios extensionis gradus et modos: requiritur solummodo ut in his ideis earumque mensuris considerandis eadem geneseos ac variationis conservetur norma. Si vis acceleratrix agere fingatur intercedentibus finitis et æqualibus temporis periodis, durante unaquâque periodo, prior manet velocitas; sed hæc, addita velocitati novo vis impulsu generatæ, efficit, ut corpus deinceps motu majõri, uniformi vero in singulâ periodo, feratur; et differentiæ spatiorum, quæ temporibus hisce æqualibus et finitis describuntur, accuratæ erunt mensuræ differentiarum inter varias velocitates his impulsibus generatas. Si intervalla temporum minuantur, hæc mensuræ in eadem proportionem decrescunt; et si intervalla hæc perpetuò minuantur, ut tandem accedamus ad statum quo indefinenter agit vis, hoc est, si intervalla temporum perpetuò accedant ad evanescentiæ statum, virium effectus determinantur explorando leges quantitatum quæ secundum normam similem variantur. Proinde, si ex hypothesi indivisibilium quidquam de earum proprietatibus demonstrari possit, virium acceleratricium effectus et correspondentes relationes simul deteguntur; similiter, si secundum Newtoni methodum à variationibus finitis magnitudinum geometricarum ipsarum relationes inveniantur, eodem tempore inveniri possunt vel leges virium acceleratricium vel spatia his viribus descripta. — Et, quoniam patet vim acceleratricem impulsus suos non edere post finita temporis intervalla, sed agere eam indefinenter; spatia, vi tali descripta, eadem methodo investigari nequeunt, quæ spatia finitis intervallis à se invicem distincta: necessariò igitur requiritur ut aliâ investigationis ratione utamur, hoc est, ut vel indivisibilium vel rationum primarum ac ultimarum doctrina in æstimandis virium acceleratricium quantitatibus et effectibus usurpetur.

Si



Part



Si vis acceleratrix in eâdem directione quâ imprimitur vis projectilis corpus sollicitet, motus erit rectilineus quidem, sed ob continuam ejus accelerationem oportet ut ad ultimarum rationum doctrinam recurramus si spatia datis quibusvis temporibus descripta determinare velimus. — Si directio vis acceleratricis cum motu projectili in angulo quocunque componatur, corpus, à directione tangentis perpetuò sollicitatum, à motu rectilineo retrahitur, et in curvam detorquetur; prout conspici licet in corporibus prope superficiem telluris projectis. Curvam insuper generari nisi motu puncti directionem suam perpetuò mutantis concipere non licet. Quoniam igitur et curva et semita corporis vi centripetâ vique projectili agitati simili prorsus modo generantur, patet quòd ab iisdem mediis, quibuscum curvarum proprietates deteguntur, determinari etiam possunt leges virium quarum actione corpora in curvas detorquentur; et proinde, si ope primarum ac ultimarum rationum curvarum proprietates commodè investigari possint, necesse est ut concedatur Newtono doctrinam hanc ad virium centripetarum leges effectusque determinandos applicare.

LEMMA

LEMMA I.

SECTIO
PRIMA.

Quantitates, ut et quantitarum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito [^b] constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, sunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, et sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin. [^c]

LEM-

[^b] 2. Quantitates ad æqualitatem tendere dicuntur quarum differentia, mutatâ utcumque quantitarum magnitudine, ita variatur, ut minorem perpetuò rationem habeat ad quantitates ipsas.

3. Fieri potest, ut quantitates ad æqualitatem tendant, et tamen non fiant ultimò æquales. Ex. gr. Areæ dantur hyperbolicæ, quæ in infinitum protensæ nunquam in tempore finito dato rectangulo æquales fiunt: sumatur rectangulum hoc dato rectangulo majus; et differentia inter aream hyperbolicam perpetuò auctam et hoc rectangulum perpetuò minorem habet rationem ad aream ipsam hyperbolicam, nunquam vero minor evadet quantitate datâ quæ assignari potest: hæ igitur quantitates, quamvis ad æqualitatem tendunt, nunquam fiunt æquales.

[^c] 4. Variari fingantur quantitates secundum hanc legem, nimirum ut earum differentia semper decrescens capi possit, ut quæ ad quantitates ipsas habeat rationem perpetuò minorem ratione quâvis quæ assignari potest; velocitates, quibuscum hæ quantitates generari incipiunt, sunt æquales. Si enim velocitates in primo momento ponantur inæquales, tum quantitates his velocitatibus descriptæ erunt etiam inæquales, et proinde, talis assignari potest differentia, quæ non habeat ad quantitates ipsas rationem quâvis assignabili minorem; quod hypothesi contradicit.

5. Quoniam veritas hujusce Lemmatis stabilitur deducendo contrariam quamvis hypothesin ad absurdum, parum differt ratiocinandi forma ab eâ, quâ usi sunt veteres; Newtonus vero, hoc Lemmate, quasi axioma vel principio quodam fundamentali, innixus, methodo directâ in sequentibus utitur, quorum demonstrationes ad hoc semper revocantur, et quasi in eo continentur.

6. Abs re forsan non erit hujusce Lemmatis sensum exemplis quibusdam simplicissimis illustrare.

Ex. I.

TAB. II.
FIG. 9.

Ex puncto *A* in diametro *BD* circuli *BCD* ducatur linea quævis *AC*, quæ circa punctum *A* versus *AB* immotam revolvatur, et punctum *C* in peripheriâ

pheriâ circuli inveniatur. Patet [El. iii. 7.] lineam AC augeri donec tandem ad lineam AB perveniat. — Hæ quantitates AB et AC [secundum hoc Lemma] tempore finito ad æqualitatem tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, ideoque sunt ultimò æquales. — Tempus finitum est tempus motûs puncti C ad punctum B ; per verbum ultimò intelligitur ipsius C ad B appulsus; et proportio AC ad AB in hoc momento est ultima harum quantitarum ratio; *i. e.* ratio æqualitatis.

Ex. II. Similiter, si punctum E in diametro BD productâ sumatur, et jungantur E et C puncta; linea EC dum punctum C versus B moveatur diminuitur [El. iij. 8.]; eadem vero est conclusio ut priùs: scilicet ratio EC ad EB est ultimò ratio æqualitatis.

Ex. III. Circuli diametro BD immotâ manente, ad eam appropinquet linea FG , quæ parallela ei ducitur, et motu sibi parallelo fertur. Tali motu augetur FG [El. iij. 15.]; ad æqualitatem igitur cum BD tendit, et ante finem temporis finiti propius ad eam accedit quàm pro datâ quâvis differentiâ, ideoque FG ac BD fiunt ultimò æquales.

Tria hæc exempla ad quantitates solummodo attinent; Lemma vero de rationibus quantitarum ad æqualitatem tendentibus loquitur, et idcirco sequentia duo ad hoc illustrandum adhibeantur.

Ex. IV. Datis positione rectis HI , HK , LMN , et à puncto O in lineâ LN ductâ rectâ lineâ OPQ , ratio QO ad PO major est quàm ratio LO ad MO : si autem linea OPQ circa punctum O revolvatur, et ad lineam OL appropinquet, manifestum est rationem QO ad PO diminui, ideoque nullam assignari posse rationem majorem illâ quam fert OL ad OM , quantulacunque sit inter eas differentia, quin linea OQ ad OL eo usque accedat, ut ratio OQ ad OP fiat tandem assignatâ illâ minor; — Ideoque LO ad MO est ultima ratio lineæ OQ ad lineam OP .

TAB. II.
FIG. 10.

Ex. V. Iisdem manentibus ratio trianguli QLO ad triangulum PMO major est quàm ratio duplicata lineæ LO ad lineam MO ; ob accessum verò OQ ad OL ut priùs, ratio triangulorum ad rationem illam duplicatam perpetuò accedit; et ratio duplicata OL ad OM est ultima ratio trianguli OLQ ad triangulum OMP .

Si in his quinque exemplis lineam eandem motu contrario ferri, et ex limitibus iisdem motum suum incipere concipiamus, rationes illæ, quæ modò ultimæ fuerunt, mutato verbo primæ vocantur. — Ex. Gr. Si linea OQ à lineâ OL recedat, et ex tali recessu nascantur prædicta triangula, ratio duplicata LO ad MO est prima nascentium triangulorum ratio. De cæteris similiter:

SECTIO
PRIMA.

LEMMA II.

TAB. II.
FIG. II.

Si in figurâ quâvis AacE, rectis Aa, AE et curvâ acE comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque Ab, Bc, Cd, &c. sub basibus AB, BC, CD, &c. æqualibus, et lateribus Bb, Cc, Dd, &c. figuræ lateri Aa parallelis contenta; et compleantur parallelogramma aKbl, bLcm, cMdn, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, et numerus augeatur in infinitum: dico quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta AKbLcMdD, circumscripta AalbmcndOE, et curvilinea Aabcde, sunt rationes æqualitatis.

Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl , Lm , Mn , Do , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb et altitudinum summa Aa , id est, rectangulum $ABla$. [^d] Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1.) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimo æquales. Q.E.D.

LEMMA III.

TAB. II.
FIG. II.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. sunt inæquales, et omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, et compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia figuræ in-

TAB. II.
FIG. II.

[^d] 7. Patet vero, quòd basi AB diminutâ, rectangulum $ABla$ diminuitur: Si bases AB , BC , CD , DE bisecentur in ϵ , γ , δ , ϵ , differentia inter figuras inscriptas et circumscriptas erit rectangulum $A\epsilon\lambda\alpha$; cumque hoc rectangulum $A\epsilon\lambda\alpha$ minorem perpetuò habet proportionem ad figuras ipsas, hæ fi-

inscriptæ et figuræ circumscriptæ; at latitudine sua AF in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. Q.E.D. [c]

SECTIO
PRIMA.

LEMMA IV.

C. 4.

Si in duabus figuris $AacE$, $PprT$, inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, et ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ $AacE$, $PprT$, sunt ad invicem in eadem illa ratione.

TAB. II.
FIG. 12.

Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, et ita figura ad figuram; existente nimirum figura priore (per lemma 111.) ad summam priorem, et figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q.E.D.

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; et partes illæ, ubi numerus earum augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi

figuræ ad æqualitatem tendunt [2]. Continuâ vero bisectione linearum AB , BC , &c. differentia hæc minor fit quovis dato rectangulo. Ergo (per lemma 1, &c.)

[c] 8. Si chordæ ab , bc , cd , dE duci concipiantur, et inscribi trapezia, $AabB$, $BbcC$, &c. porro si tangentes ducantur ad puncta a , b , c , d , E , figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, erunt etiam in ratione æqualitatis. In hoc verò casu continuâ basium AB , BC , CD bisectione, figura inscripta eò augetur, et figura circumscripta eò diminuitur, ut plus quàm dimidium differentiæ perpetuò auferatur: ideoque per El. x. 1.] differentia earum tandem minor erit quantitate quâvis datâ.

SECTIO
PRIMA.

ubi partium et parallelogrammorum numerus augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; et areæ sunt in duplicata ratione laterum. [f]

LEMMA VI.

TAB. II.
FIG. 13.

Si arcus quilibet positione datus ACB subtendatur chorda AB, et in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ [g] tangatur a recta utrinque producta AD; dein puncta

TAB. II.
FIG. 12.

[f] 9. Si parallelogramma in lemmate iv. non sint numero solummodo æqualia, sed sint etiam similia, tum similes erunt figuræ $AacE$, $PprT$; eandemque habebunt ad invicem rationem quam rectangula ipsa; i. e. rationem laterum duplicatam.

[g] 10. In hoc supponere videtur Newtonus, nullam esse contrariam curvæ flexuram; nec esse punctum A cuspidem; in quibus casibus curvatura vel infinitè minor est, vel infinitè major curvaturâ circuli. Curvæ autem continuæ generantur motu puncti directionem suam continuo mutantis, et sunt ubique versus eandem partem cavæ. — Circulus nempe est curva continua: inter circulum vero et aliam quamvis curvam continuam hoc interest, quòd circuli curvatura, ceu ejus à tangente flexura ubique eadem est; in aliis autem curvis modo major fit, modo minor. Cum autem diversorum circulorum à tangente flexura diversa sit, curvaturam curvarum circulorum ope exprimunt geometræ. Neque est hæc ratiocinandi methodus aut reprehensibilis, aut conceptu difficilis. Describi possunt circuli numero infiniti, qui eandem lineam tangentem, idemque contactûs punctum habent: duci etiam potest curva, ita ut ab eâdem rectâ lineâ in puncto eodem tangatur: patet circulos hos omnes curvam illam in puncto contactûs tangere, diversosque habere cum curvâ contactûs vel magis vel minus intimi gradus: Ideoque, prout ex rectis lineis, quæ numero infinitæ per idem curvæ punctum transeunt, illa solummodo curvam tangit, quæ ita ducitur, ut nulla alia recta inter curvam et tangentem duci queat, quin curvam secet; ita quoque, ex prædictis circulis, is est curvaturæ circulus, qui tam intimè curvam tangit, ut nullus alius per contactûs punctum describi possit, qui transit inter circulum et curvam; alii verò

puncta A, B ad invicem accedant et coëant; dico quod angulus BAD, sub chorda et tangente contentus, minuetur in infinitum et ultimo evanescet.

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, et propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, et tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. [h]

Nam

verò omnes circuli vel intra vel extra circum curvaturæ necessariò cadunt: et prout recta linea, quæ curvam tangit, cum curvâ illâ coincidere nequit, ita circulus curvaturæ cum curvâ non coincidit.

His præmissis, lemmatis veritas, quæ à Newtono subobscurè deduci videtur, vel forsan ex præconcesso sequenti lemmate profluere, facillimè ex naturâ circuli patet. Nam si curvatura curvæ finita est, et quæ per circum mensuratur, describi potest alius circulus ABC , qui cadet intra et circum curvaturæ et curvam: angulus autem BAD , inter chordam AB et tangentem AD contentus, æqualis est angulo ACB in alterno segmento, et angulus ACB , evanescente arcu AB , evanescit: idem in curvâ obtinet à fortiori.

TAB. II.
FIG. 14.

Hinc etiam lemma obtinet, non solum in curvis finitæ curvaturæ, sed à fortiori in omnibus illis, in quibus curvatura infinitè minor est curvaturâ circuli.

[h] 11. Sit AD linea finita, ducaturque dr lineæ DR parallela, occurrens AB , AR productis in b et r : erit $AB:AD::Ab:Ad$ [El. vi. 2.]. Transferatur punctum B ad C , ducanturque RCE , et chorda AC ; et ratio variabilis chordæ et tangentis fiet ratio AC ad AE . A puncto d ut priùs ducatur dp ipsi ER parallela, occurrens AC , AR productis in c et p ; eritque $AC:AE::Ac:Ad$. Tandem cum angulus sub chordâ et tangente contentus minor fiat quovis angulo rectilineo [Lem. vi.], ratio variabilis Ac ad Ad accedit propius ad rationem æqualitatis quàm pro datâ quâvis differentiâ; ideoque iis proportionales chorda et tangens sunt ultimò æquales. Quoniam vero arcui AC in triangulo ACE contento similis describi queat arcus Ac in simili triangulo $Ac d$; cumque ultimò arcus inter Ac et Ad intermedius fiat æqualis Ac vel Ad ; arcus quoque Ac evanescet chordæ vel tangenti æqualis. Q. E. D.

TAB. II.
FIG. 15.

[12] Hæc propositio, circuli ope hoc modo illustrari potest. — Si à puncto B agatur utcumque subtenfa BD , efficiens angulum quemlibet finitum BDA

TAB. II.
FIG. 14.

SECTIO
PRIMA.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB et AD ad puncta longinqua b ac d produci, et secanti BD parallela agatur bd . Sitque arcus Acb semper similis arcui ACB . Et punctis A, B coëuntibus, angulus dAb , per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ Ab, Ad , et arcus intermedius Acb coincident, et propterea æquales erunt. Unde et hisce semper proportionales rectæ AB, AD , et arcus intermedius ACB evanescunt, et rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

TAB. II.
FIG. 16.

Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF , rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuo secans in F , hæc BF ultimo ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo $AFBD$ rationem semper habet æqualitatis ad AD .

Corol. 2. Et si per B et A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG , secantes tangentem AD et ipsius parallelam BF ; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG , chordæque et arcus AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

TAB. II.
FIG. 13.

Si rectæ datæ AR, BR cum arcu ACB , chorda AB et tangente AD , triangula tria $RAB, RACB, RAD$ constituunt, dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, et ultima ratio æqualitatis.

Nam

 $\overline{AD+BD}$

BDA cum tangente AD , et ducatur linea AC subtensæ BD parallela, similia erunt triangula CAB, ABD ; quare AB, AD et $\overline{CB+BA}$ sunt ad invicem ut CA, CB et $\overline{CB+BA}$. Coëat jam punctum B cum A , eruntque CA, CB et $\overline{CB+BA}$ in ratione æqualitatis, ideoque AB, AD et $\overline{AD+BD}$ sunt ultimò æquales. Quare à fortiori AB, AD et arcus AB sunt ultimò in æqualitatis ratione.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB , AD , AR ad puncta longinqua b , d et r produci, ipsique RD parallela agi $rb d$, et arcui ACB similis semper sit arcus Acb . Et coëuntibus punctis A , B , angulus bAd evanescet, et propterea triangula tria semper ^[1] finita rAb , $rAcb$, rAd coincident, suntque eo nomine similia et æqualia. Unde et hisce semper similia et proportionalia RAB , $RACB$, RAD fient ultimo sibi invicem similia et æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE et curva ABC positione datæ se mutuo secent in angulo dato A, et ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE, curvæ occurrentes in B, C, dein puncta B, C simul accedant ad punctum A: dico quod areæ triangulorum ABD, ACE erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.

TAB. II.
FIG. 17.

Etenim dum puncta B , C accedunt ad punctum A , intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua d et e , ut sint Ad , Ae ipsis AD , AE proportionales, et erigantur ordinatæ db , ec ordinatis DB , EC parallelæ quæ occurrant ipsis AB , AC productis in b et c . Duci intelligatur, tum curva Abc ipsi ABC similis, tum recta Ag , quæ tangat curvam utramque in A , et secet ordinatim applicatas DB , EC , db , ec in F , G , f , g . Tum manente longitudine Ae coëant puncta B , C cum puncto A ; et angulo cAg evanescente, coincident areæ curvilineæ Abd , Ace cum rectilineis Afd , Age ; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum Ad , Ae : Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD , ACE , et his lateribus latera AD , AE . Ergo et areæ

ABD ,

[1] 13. Veritas hujuscæ lemmatis ex coincidentia triangulorum nequaquam pendet, ex lemmate vero superiori, et El. i. 8, satis patet.

SECTIO
PRIMA.

ABD , ACE sunt ultimo in duplicata ratione laterum AD , AE .
Q.E.D.

LEMMA X. c

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita describit, sive vis illa determinata et immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

TAB. II.
FIG. 17.

Exponentur tempora per lineas AD , AE , et velocitates genitæ per ordinatas DB , EC ; [^k] et spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areae ABD , ACE his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma 1x) in duplicata ratione temporum AD , AE . Q.E.D.

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similibus figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibuscunque æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, et mensurantur per distantias corporum a figurarum similibus locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime. [¹]

Corol. 2.

TAB. II.
FIG. 18.

[^k] 14. Hoc illustrare licet sequenti methodo. Describatur area $DABC$ motu lineæ DE sibi ipsi parallelo et uniformi: et in eodem tempore describatur linea PQ motu uniformi puncti Q , et representetur velocitas puncti Q per lineam DC : patet, aream $DABC$ et lineam PQ in eadem ratione variari [El. vi. 1.]. Variari fingatur longitudo lineæ moventis DE , et ob variationem puncti Q in eadem ratione velocitatem, eorum effectus in eadem variantur ratione. Per motum ipsius D ad A , longitudine DE mutatâ, describitur area $DEbA$, spatium igitur à puncto Q percursum, seu longitudinem lineæ PQ per aream à lineâ DC descriptam licet exprimere. Cum enim areae describuntur perpetuo linearum fluxu, lineæque perpetuo punctorum fluxu, si velocitas quâcum area crescit æquetur velocitati puncti moventis, cujus motu linea describitur, rationes linearum, quæ à motu puncti describuntur, accurate per arearum rationes exprimuntur.

TAB. II.
FIG. 19.

[¹] 15. Sint lineæ AD , ad , motu uniformi descriptæ in temporibus quibuscunque, agant vires his directionibus perpendiculares, quæ corpora detorqueant in curvas AB , ab , et quoniam eadem est directio virium perturbatricium, idem

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibuscvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directe et quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe et vires inverse.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB , tangens ejus AD , subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD , subtensa arcus AB . Huic subtensæ AB et tangenti AD perpendiculares erigantur AG , BG , concurrentes in G ; dein accedant puncta D , B , G , ad puncta d , b , g , sitque I intersectio linearum BG , AG ultimo facta ubi puncta D , B accedunt usque ad A . Manifestum est quod distantia GI minor esse potest quam assignata quævis †. Est autem (ex
na-

TAB. III.
FIG. 20.

idem evenire debet ac si corpus datum datâ vi acceleratrici sollicitatum spatia diversa temporibus diversis describeret, hoc est, erunt spatia vel errores DB , db in temporum ratione duplicatâ: sumantur alia quævis tempora et erunt errores RK , rk in eâdem temporum ratione duplicatâ. Corpore vero ad B pervento motus BK resolvi potest in motus BL , BT , quorum si BT directio mutetur ut fiat BP , corpus ad finem temporis versabitur in Q , et error QR non erit ad errorem rk ut prius in ratione temporis duplicatâ, et proinde necesse est ut anguli applicationis maneant iidem si errores temporis quadrato proportionales esse vellemus.

PROPOSITIO.

† 16. — Posito quòd rectangulum $BD \times DG$ sit semper æquale AD^2 , et quòd punctum G describat curvam GgI , transeatque ultimò per I ; circulus, cujus chorda est AI et tangens AD , eandem habebit curvaturam quàm curva AbB in loco A .

TAB. III.
FIG. 21.

D

DEM. Oc-

SECTIO
PRIMA.

natura circulorum per puncta ABG , Abg transeuntium) AB quad. æquale $AG \times BD$, et Ab quad. æquale $Ag \times bd$; ideoque ratio

DEM. Occurrat linea DG circulo in C et E ; et per naturam circuli erit $\text{Rect. } CD \times DE = DA^2 = \text{Rect. } BD \times DG$ [per Hyp.]; unde est $CD : BD :: DG : DE$; transeat primò GgI extra circulum, erit semper CD major quàm BD , et transibit curvâ AbB extra circulum AcC : circulus autem, cujus chorda minor est quàm AI , transibit infra circulum AcC : et circulus, cujus chorda major est quàm AI , transibit extra curvam AbB ; nam fit ut priùs $qD : BD :: DG : DQ$, et quoniam est chorda Ai major quàm AI , DG non occurrere potest cum AI , quin fiat DQ major quàm DG , et BD major quàm qD : nullus igitur circulus transire potest inter curvam AbB et circulum AcC ; et proinde eandem habent curvaturam.

Si transeat IgG intra circulum curvaturæ, eodem argumento patet, quòd BD major sit quàm CD , quòd curvâ AbB transeat infra circulum AcC , et quòd nullus describi possit circulus, qui non transsit vel intra vel extra tam circulum AcC , quàm curvam AbB .

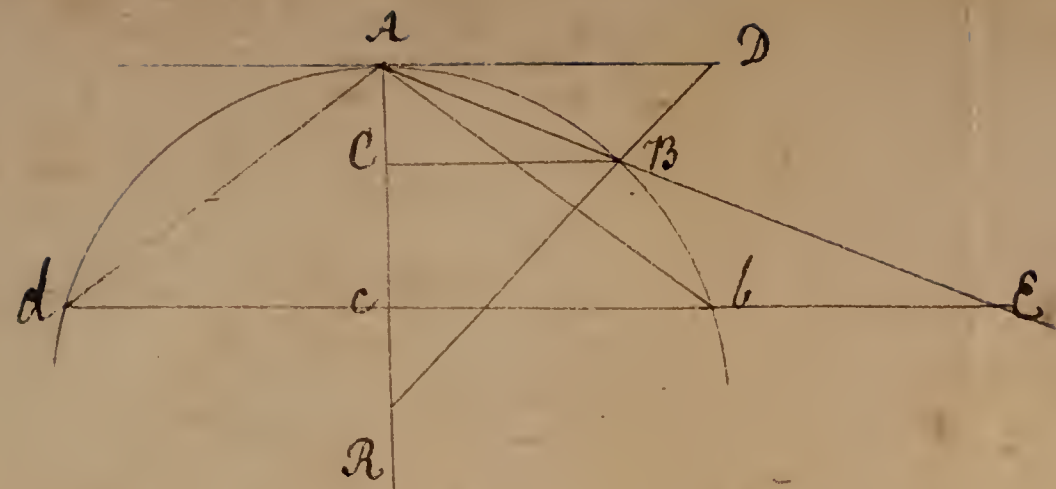
TAB. III.
FIG. 22.

Cor. 1. — Sequitur circulum atque curvam eò propius ad coincidentiam accedere quò minor est angulus GIE . — Sit enim Am alia quævis curvâ, cujus tangens est AD , et sit rectangulum $mD \times Dg$ semper æquale AD^2 , curvâ Am eandem habebit curvaturam in puncto A quam circulus AC ; transeat punctum g inter IG et IE , et quoniam est $Dm \times Dg = AD^2 = DB \times DG$, fit $Dm : BD :: DG : Dg$, ergo Dm major est quàm DB : eodem modo patet, esse $Dm : DC :: DE : Dg$, et Dm minorem esse quàm DC ; punctum igitur m transsit necessariò intra circulum AC et curvam AB . Exinde patet, diversos esse gradus contactûs pro diverso angulo GIE , si angulus ille finitus esse supponatur. Sit autem angulus GIE ejusdem generis cum angulo inter tangentem et circulum contento, vel habeat curvâ GI eandem curvaturam cum circulo, et sic deinceps; erit in singulis his casibus contactus curvæ AB cum circulo AC indefinitè propior quàm priùs.

TAB. III.
FIG. 23.

Cor. 2. Si linea AI sit curvæ GI asymptotus, quò major est AI diameter circuli, eò propius accedit circulus ad curvam AB : quoniam autem linea AI indefinitè producta nunquam attingat curvam GI , circulus cujus diameter est AI nunquam habebit eandem curvaturam cum curvâ AB . In hoc casu diameter curvaturæ indefinitè magna est, vel curvatura indefinitè minor esse dicitur quàm curvatura circuli; uti accidit in vertice parabolæ cubicalis, et in omni curvâ in quâ abscissa est ut dignitas ordinatæ quæ major est quàm quadratum.

Cor. 3. Transeat GI per punctum A ; erit AI diameter curvaturæ indefinitè parva; et curvatura indefinitè major esse dicitur quàm curvatura circuli: hujus exemplum habemus in vertice parabolæ semicubicalis, et in omni curvâ in quâ subtensa est ut dignitas ordinatæ quadrato minor.



$$ab : bc :: r : s \angle cab$$

$$ab - bc : ab :: r - s \angle cab : r$$

$$ab : bc :: r - s \angle cab : r$$

as b comes up to a, $s \angle cab$ constantly increases because the $\angle cab$ constantly increases, $\therefore r - s \angle cab$ will constantly decrease because $\angle cab$ was at first less than r ; \therefore since ab be the difference between ab & bc is to this decreasing quantity $r - s \angle cab$ in the ratio of ab the ratio of $r - s \angle cab : r$ will be a decreasing ratio, this is equal the ratio $ab - bc : ab$, this therefore will be a decreasing ratio, ie, the difference between ab & bc will constantly bear a less ratio to ab & bc

$$db : ad :: s \angle dab : s \angle dba$$

$$s \angle dab :: s \angle dba :: s \text{ twice } \angle dab (= s \text{ of twice } \angle dba) : s \angle dba$$

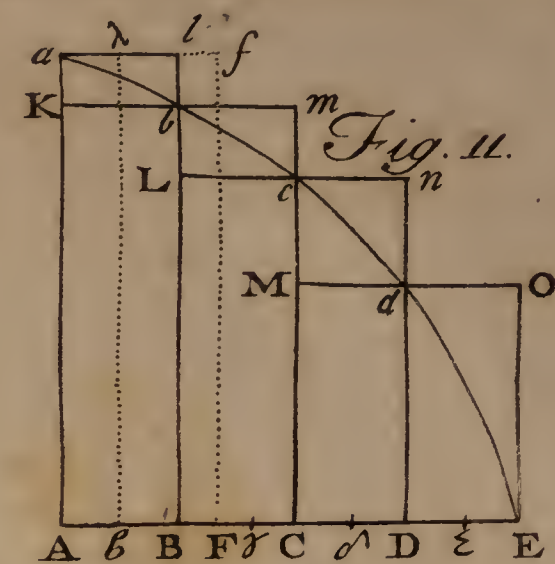
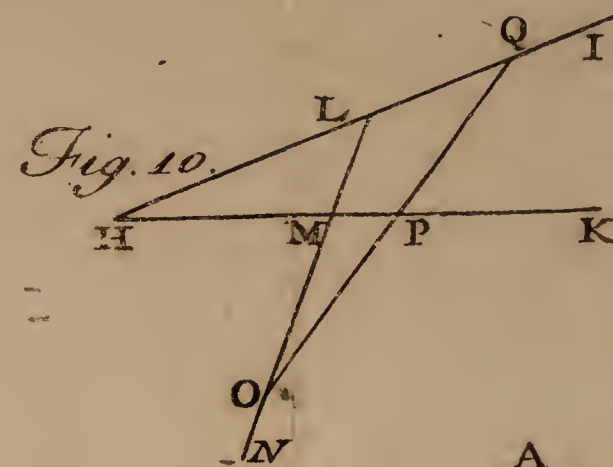
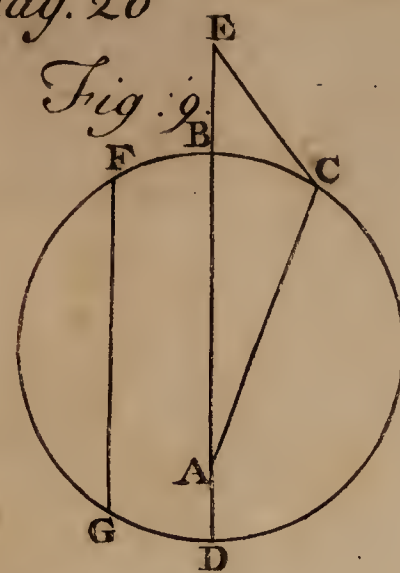
Let b & d come up towards a so that the $\angle dab$, $\angle dba$ shall be exceeding small, & then twice $\angle dba$ will be exceeding small also;

$$\therefore s \text{ of twice } \angle dba :: s \angle dba :: \text{twice } \angle dba : \angle dba :: 2 : 1 \therefore$$

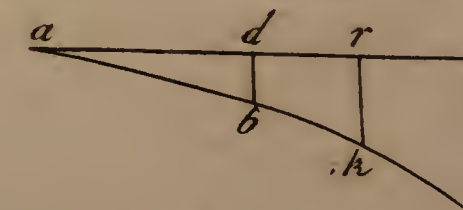
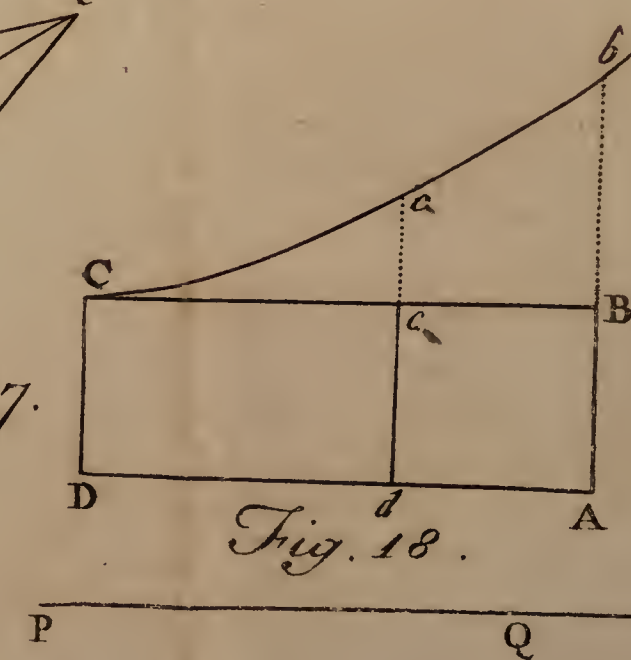
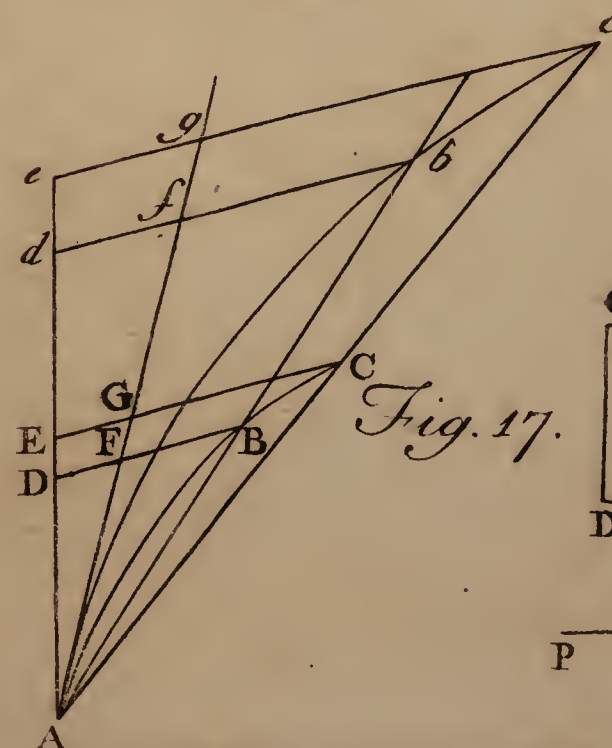
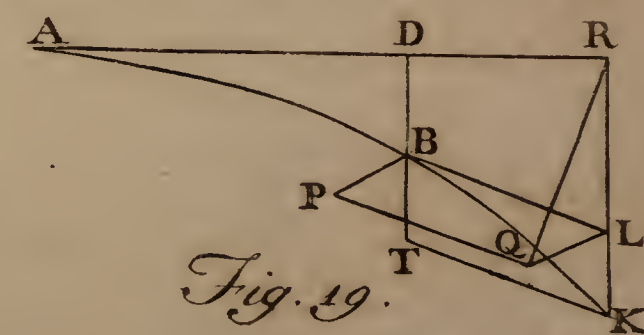
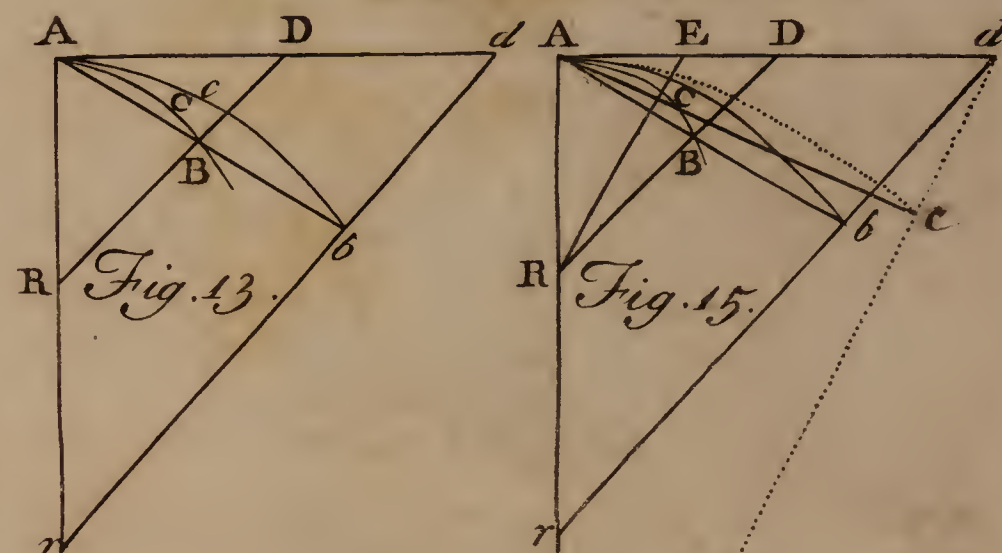
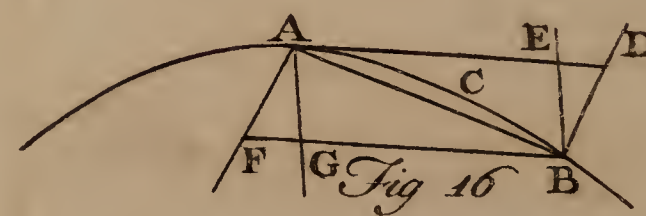
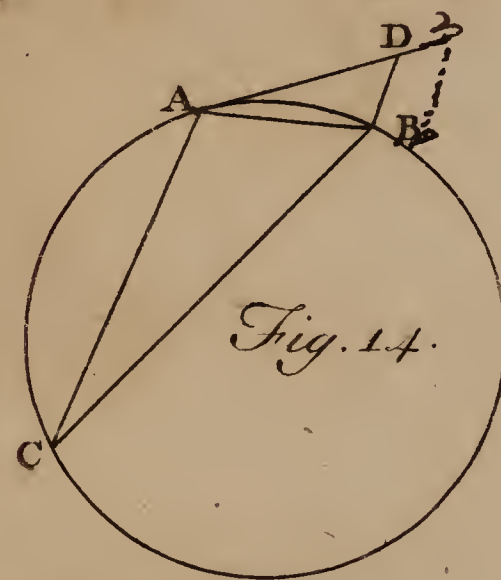
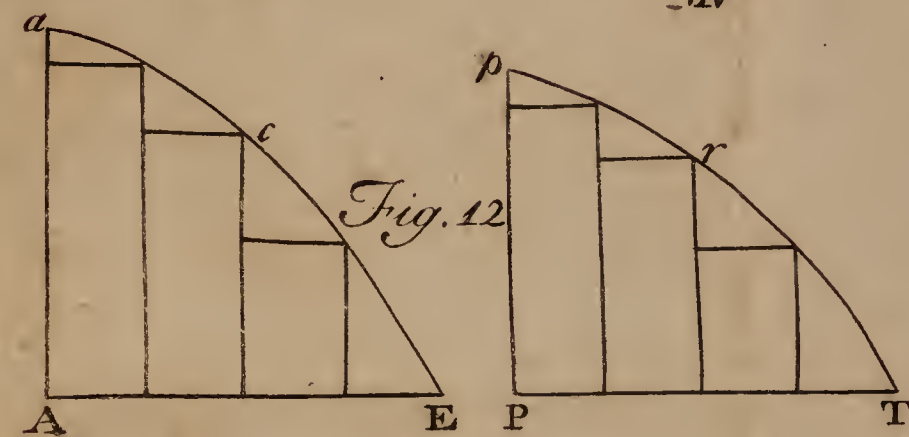
$$db : ad :: 2 : 1, \text{ \& since } bc : db :: 1 : 2. \text{ we have comp:}^o bc : ab$$

$$(= ad) :: 1 : 1, \text{ \& } bc = ab: \text{ again if } bc = ab, \angle bca = \angle bac, \text{ but } \angle bca = \text{a right } \angle, \therefore \angle bac = \text{a right } \angle, \therefore \angle dba \text{ \& consequently } \angle bad = 0.$$

pag. 26



TAB II



ratio AB quad. ad Ab quad. componitur ex rationibus AG ad Ag et BD ad bd . Sed quoniam GI assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, ideoque ut ratio AB quad. ad Ab quad. minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima AB quad. ad Ab quad. eadem cum ratione ultima BD ad bd . Q. E. D.

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, et eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, ideoque eadem ac AB quad. ad Ab quad. Q. E. D.

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli D , d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent et propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1. et propterea lineæ BD , bd sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cum tangentes AD , Ad , arcus AB , Ab , et eorum sinus BC , bc fiant ultimo chordis AB , Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtenfæ BD , bd .

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant et ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtenfæ BD , bd .

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB , Adb sunt ultimo in triplicata ratione laterum AD , Ad , inque sesquuplicata laterum DB , db ; utpote in composita ratione laterum AD et DB , Ad et db existentia. Sic et triangula ABC , Abc sunt ultimo in triplicata ratione laterum BC , bc . Rationem vero sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici et subduplicata componitur.

SECTIO
PRIMA.

Corol. 5. Et quoniam DB , db sunt ultimo parallelæ et in duplicata ratione ipsarum AD , Ad : erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB , Adb (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB , Adb ; et segmenta AB , Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD , Ad , tum chordarum et arcuum AB , Ab .

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum AI finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3 : quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem AD et curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat BD successive ut AD^2 , $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, et quilibet posterior infinite major priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inferi, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 et AD^3 inferatur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem [^m].

Quæ

TAB. III.
FIG. 24.

* [^m] 17. Si curvæ AB , AC , et recta AD se mutuò contingant in loco A , actâque secundum quamcunque legem rectâ DBC , fuerit DB , vel universaliter, vel saltem evanescens, ut AD^m , et CD ut AD^n , existente m majore quàm n : dico angulum contactus BAD infinitè minorem fore angulo CAD , et idcirco nullam

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies, curvas et contenta. Præmissi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minus geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; et principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse.

lam lineam curvam ejusdem generis cum AC duci posse inter curvam AB et tangentem suam AD .

Esto enim $BD = \frac{AD^m}{p}$, et $CD = \frac{AD^n}{q}$, positis p et q finitis et constantibus, erit BD ad CD ut $\frac{AD^m}{p}$ ad $\frac{AD^n}{q}$, vel ut AD^m ad $AD^n \times \frac{p}{q}$, vel ut AD^{m-n} ad $\frac{p}{q}$. Evanescat jam AD et simul AD^{m-n} , et BD jam erit ad CD ut quantitas evanescens AD^{m-n} ad quantitatem finitam $\frac{p}{q}$, vel ut finitum ad infinitum: Est itaque subtenſa evanescens BD infinitè minor subtenſâ evanescente CD , et propterea angulus BAD angulo CAD . Q. E. D.

SECTIO
PRIMA.

esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum et quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima et ultima est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothese. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescientium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, et prima temporis parte describat corpus vi insita rectam AB . Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad c , (per leg. I.) describens lineam Bc æqualem ipsi AB ; adeo ut radiis AS , BS , cS ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ ASB , BSc . Verum ubi corpus venit ad B , agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta Bc declinet et pergat in recta BC . Ipsi BS parallela agatur cC , occurrens BC in C ; et completa secunda temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in C , in eodem plano cum triangulo ASB . Junge SC ; et triangulum SBC , ob parallelas SB , Cc , æquale erit triangulo SBc , atque ideo etiam triangulo SAB . Simili argumento si vis centripeta successive agat in C , D , E , &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD , DE , EF , &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; triangulum SCD triangulo SBC , et SDE ipsi SCD , et SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: et componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus et minuatur latitudo triangulorum in infinitum; et eorum ultima perimeter ADF erit linea curva [8]: ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indefinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. Q.E.D.

Corol. I.

TAB. III.
FIG. 25.

SECTIO
SECUNDA.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistantibus reciproce ut perpendicularum a centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E , ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF ; et hæ bases sunt reciproce ut perpendiculara in ipsas demissa [ⁿ].

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parellogrammum $ABCV$, et hujus diagonalis BV in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistantibus descriptorum chordæ AB, BC , ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCV, DEFZ$; vires in B et E sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium BV, EZ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC et EF componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus Bc, BV et Ef, EZ : atqui BV et EZ , ipsis Cc et Ff æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B et E , ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistantibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbis curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, et chordas bifecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eadem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6.

[ⁿ] 18. Triangula prædicta non sunt in diversis orbitis necessariò æqualia; quoniam vero bases diversorum triangulorum sint ut areæ directè, et ut perpendiculara in ipsas demissa inversè; erunt idcirco velocitates, quæ per has bases representantur, universaliter ut areæ triangulorum directè, et ut perpendiculara inversè.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA. II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, et radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum [°].

Cas. 1. Nam corpus omne, quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, qua corpus de cursu rectilineo detorquetur, et cogitur triangula quam minima SAB , SBC , SCD , &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per prop. XL. lib. 1. elem. et leg. 11.) hoc est, secundum lineam BS ; et in loco C secundum lineam ipsi dD parallelam, hoc est, secundum lineam SC , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S . Q. E. D.

TAB. III.
FIG. 25.

Cas. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde est, five quiescat superficies, in qua corpus describit figuram curvilineam, five moveatur eadem una cum corpore, figura descripta, et puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistantibus, si areae non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; sed inde declinant in consequentia, seu versus plagam in quam

[°] 19. Hinc facilè colligitur, vires, quibus planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, et in orbibus suis retinentur, respicere solem: ex observationibus enim constat, planetas primarios, paulo celerius in periheliis ac tardius in apheliis moventes, radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales percurrere.

E

SECTIO
SECUNDA.

quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: si retardatur, declinant in antecedentia [P].

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam in quam fit motus.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius ut-
cunque moti ducto, describit areas circa centrum illud tem-
poribus proportionales, urgetur vi composita ex vi cen-
tripeta tendente ad corpus illud alterum, et ex vi omni
acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur* [q].

Patet a priori.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt,
vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere;
et esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum qua-
drata applicata ad circulorum radios.*

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. et corol. 2. prop. I. et sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. prop. I. hoc est, ut quadrata

TAB. III.
FIG. 26.

[P] 20. Sequitur ex demonstratione quòd, cum areæ sint temporibus proportionales, cC parallela fit lineæ SB , versusque centrum dirigatur. Si augeatur area compleaturque parallelogrammum $cCBv$, (secundum legum corol. 11.) patet lineam cx , eique parallelam Bv , à centro S versus plagam in quam fit motus declinare. Si diminuatur area, cy , eique parallela Bu à centro S in antecedentia declinat.

[q] 21. Hinc sequitur, vim quâ luna perpetuò retrahitur à motu rectilineo, et in orbe suo retinetur, respicere terram. Constat enim, ex motu ejus apparente cum diametro apparente collato, lunam, radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere. Idem intellige de planetis qui Saturnum et Jovem comitantur.

quadrata arcuum eorundum ad diametros circulorum applicata per lem. vii. et propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibufvis æqualibus descripti, et diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. E. D.

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directæ, et ratione simplici radiorum inversæ [^r].

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radiorum directæ, et ratione velocitatum inversæ; vires centripetæ sunt in ratione composita ex ratione radiorum directæ, et ratione duplicata temporum periodicorum inversæ [^s].

Corol. 3. Unde si tempora periodica æquantur, et propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: et contra [^t].

Corol. 4. Si et tempora periodica et velocitates sint in ratione subduplicata

[^r] 22. Sit C vis centripeta, V velocitas, P tempus periodicum, et R radius; erit $C = \frac{V^2}{R}$. Attamen notandum est, cum fingatur esse $C = \frac{V^2}{R}$, intelligi quatuor quantitates proportionales; vel vim in unâ orbitâ esse ad vim in quâvis aliâ in harum quantitatum ratione, scilicet esse $C : c :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$; nam quoniam quantitatum rationes omnes gradus variationis admittunt, earum exponentes methodo æquationum comparare licet, et exinde novæ rationes breviter eruentur.

[^s] 23. Tempus periodicum est ut peripheria circuli, vel ut radius directè, et ut velocitas inversè; unde $PP = \frac{RR}{VV}$, $\frac{1}{P^2} = \frac{V^2}{R^2}$, et $\frac{R}{P^2} = \frac{V^2}{R} = C$.

[^t] 24. Sit P data quantitas, quoniam $P = \frac{R}{V}$, data erit $\frac{R}{V}$, et proinde $V = R, V^2 = R^2$, et $\frac{V^2}{R} = R = C$. Vel si P^2 sit data, erit $\frac{R}{P^2} = R = C$ ut priùs.

Contra sit $C = R$, erit $\frac{R}{P^2} = R$; unde data est P^2 .

SECTIO
SECUNDA.

subduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter se :
et contra [v]

Corol. 5. Si tempora periodica sint ut radii, et propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: et contra [v].

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquuplicata radiorum, et propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: et contra [x].

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum fit ut radii R potestas quælibet R^n , et propterea velocitas reciproce ut radii potestas R^{n-1} ; erit vis centripeta reciproce ut radii potestas R^{2n-1} : et contra [y].

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, et viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centra-
que

[v] 25. Sit P vel $\frac{R}{V} = \sqrt{R}$, erit $V = \sqrt{R}$, et $\frac{V^2}{R} = \frac{R}{R} = 1 = C$, quæ proinde est data quantitas. Vel si fit $P = \sqrt{R}$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R} = 1 = C$, ut priùs. Contra fit C vel $\frac{R}{P^2}$ data quantitas, erit $P^2 = R$, et $P = \sqrt{R}$.

[v] 26. Sit P vel $\frac{R}{V} = R$, adeoque V data, erit $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} = C$. Vel si fit $P = R$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R} = C$, ut priùs. Contra, fit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R}$ erit $P = R$.

[x] 27. Sit P^2 vel $\frac{R^2}{V^2} = R^3$, adeoque $V^2 = \frac{1}{R}$, erit $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R^2} = C$. Vel si fit $P^2 = R^3$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^2} = C$, ut priùs. Contra, fit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R^2}$, erit $P^2 = R^3$.

[y] 28. Sit P vel $\frac{R}{V} = R^n$, adeoque $\frac{1}{V} = R^{n-1}$, et $V = \frac{1}{R^{n-1}}$, erit $V^2 = \frac{1}{R^{2n-2}}$, et $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R^{2n-1}} = C$. Vel si fit $P = R^n$, erit $P^2 = R^{2n}$, et $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^{2n}} = \frac{1}{R^{2n-1}} = C$, ut priùs. Contra, fit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R^{2n-1}}$, erit $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{R^{2n}}$, et $P = R^n$.

que in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, et distantias corporum a centrīs pro radiis usurpando [²].

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvens tempore quovis describit, medius est proportionalis inter
diametrum

[²] 29. LEM. Chordæ curvaturæ figurarum omnium similium, similiter positæ, sunt proportionales lineis quibuscunque homologis in his figuris. DEM. Sint AB, ab similes et quàm minimæ partes figurarum curvilinearum; et sint AV, av chordæ curvaturæ similiter inclinatæ tangentibus AD, ad , et ducantur BD, bd , parallelæ chordis AV, av : per naturam similium figurarum erit $BD:DA::bd:da$; est autem (16) $BD:DA::DA:AV$, et $bd:da::da:av$; ergo $DA:AV::da:av$.

TAB. III.
FIG. 27.

30. Describant jam corpora duo similes orbitas AB, ab viribus centripetis ad centra S, s similiter posita tendentibus, vel ita ut angulus BAS sit æqualis angulo bas , et SA sit ad sa , ut lineæ quævis homologæ in figuris similibus; et erit (per lem.) $SA:sa::AV:av$; vires autem centripetæ in locis A, a sunt ut sagittæ BD, bd arcuum simul descriptorum, hoc est ut $\frac{BA^2}{AV}$ ad $\frac{ba^2}{av}$, vel ut $\frac{BA^2}{AS}$ ad $\frac{ba^2}{as}$.

31. Vires centripetæ in his locis sunt etiam ut quadrata velocitatum directè, et ut distantie inversè: velocitates enim sunt ut arcus quam minimi simul descripti.

32. Vires centripetæ sunt etiam ut distantie directè, et quadrata temporum periodicorum inversè. Sint enim AB, ab arcus quàm minimi similesque diversis temporibus T, t descripti; et quoniam similes similium arearum partes SAB, sab sint ad areas totas in eadem ratione, erunt tempora T, t ut tempora tota periodica P, p . Sint V, v velocitates in arcibus quàm minimis AB, ab ; et quoniam velocitates sunt ut spacia illa directè, et ut tempora inversè, erit $V^2:v^2::\frac{AB^2}{T^2}:\frac{ab^2}{t^2}::\frac{AS^2}{T^2}:\frac{as^2}{t^2}$; unde est $\frac{V^2}{AS}:\frac{v^2}{as}$ (hoc est vis in loco A ad vim in loco a): $\frac{AS}{T^2}:\frac{as}{t^2}$ hoc est $:\frac{AS}{P^2}:\frac{as}{p^2}$. Ex jam demonstratis deducuntur cætera corollaria in similibus orbitis eodem modo ac in circulis.

SECTIO
SECUNDA.

diametrum circuli, et descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum [a].

PRO-

TAB. III.
FIG. 28.

[a] 33. * Datâ vi centripetâ, descensus S erit ut quadratum temporis T , hoc est, ob uniformem corporis motum, ut quadratum arcûs AB , vel ut $\frac{AB^2}{AE}$;

unde si in casu aliquo particulari, constiterit longitudines S et $\frac{AB^2}{AE}$ æquales esse, semper æquales erunt. Tangat recta AD circulum in A , agaturque subtenſa BD diametro AE parallela, et si arcus AB ponatur indefinitè parvus, erit subtenſa $BD = \frac{AB^2}{AE}$. Sed in hoc casu est etiam BD æqualis spatio S : nam tempore quàm minimo t considerari potest vis centripeta tanquam agens secundùm rectas diametro AE parallelas: quare in illo casu, ubi arcus AB infinitè parvus est, longitudines S et $\frac{AB^2}{AE}$ æquales sunt; ergo æquales erunt universaliter.

34. Velocitas quâ circulus describitur æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidium radium, si modo vi centripetâ constanti urgeretur æquali vi in circulo: sit enim AL spatium per quod corpus cadere debet ut acquirat velocitatem in circulo, sit AF arcus eodem tempore descriptus cum hâc velocitate, et erit $AF = 2AL$, sed $AF^2 = AL \times AE = 4AL^2$, et proinde $AE = 4AL$, et $AL = \frac{AE}{4}$.

PROBLEMA

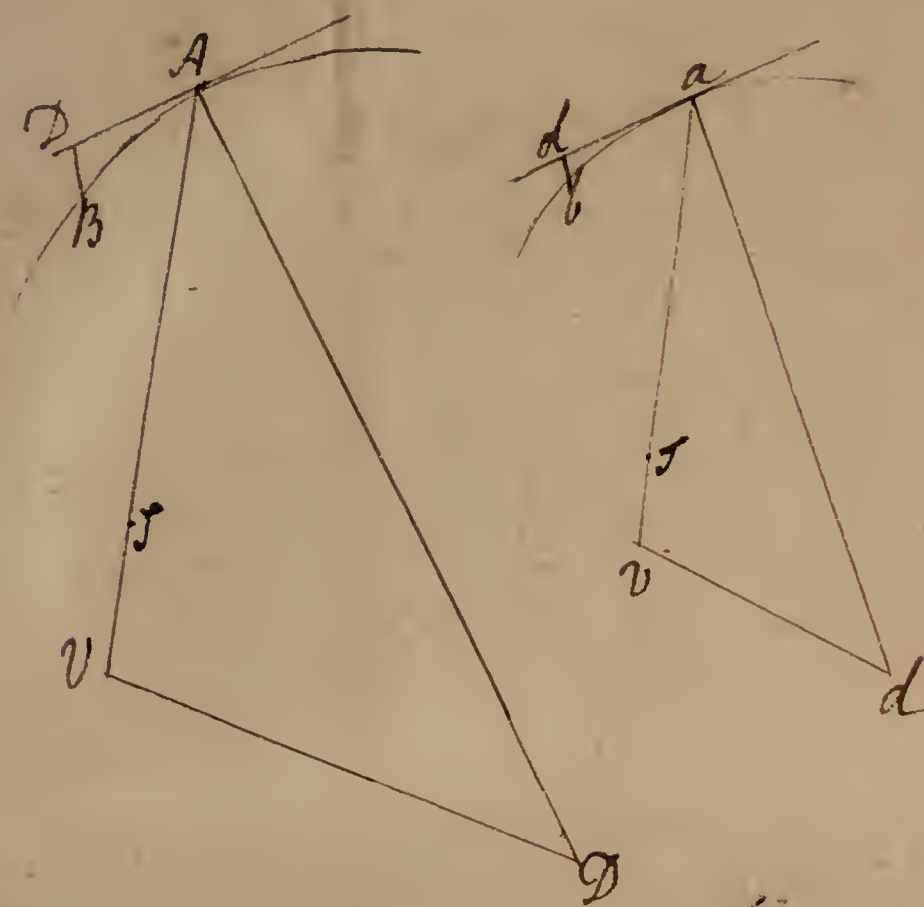
35. * Referat S spatium à gravi è quiete demisso, tempore unius minuti secundi descriptum, D diametrum terræ, et seponatur omnis ex aëre resistentia; quæritur quantâ cum velocitate projectile aliquod ex editiore in terræ superficie loco, et secundùm rectam horizonti parallelam emittendum sit, ut fiat planeta secundarius.

Pone factum, et arcus singulis minutis secundis descriptus, medius erit proportionalis inter diametrum D et spatium S . Innotescunt et D et S ex notis terræ magnitudine, et longitudine penduli ad minuta secunda oscillantis. Emitatur itaque projectile tantâ cum velocitate, quantâ sufficiat ad longitudinem \sqrt{DS} spatio unius minuti secundi uniformiter percurrendam, et solvetur problema.

36. *Cor.* Si desideretur tempus periodicum, dicendum est, ut \sqrt{DS} ad totum terræ ambitum, ita tempus unius minuti secundi, ad tempus quæsitum.

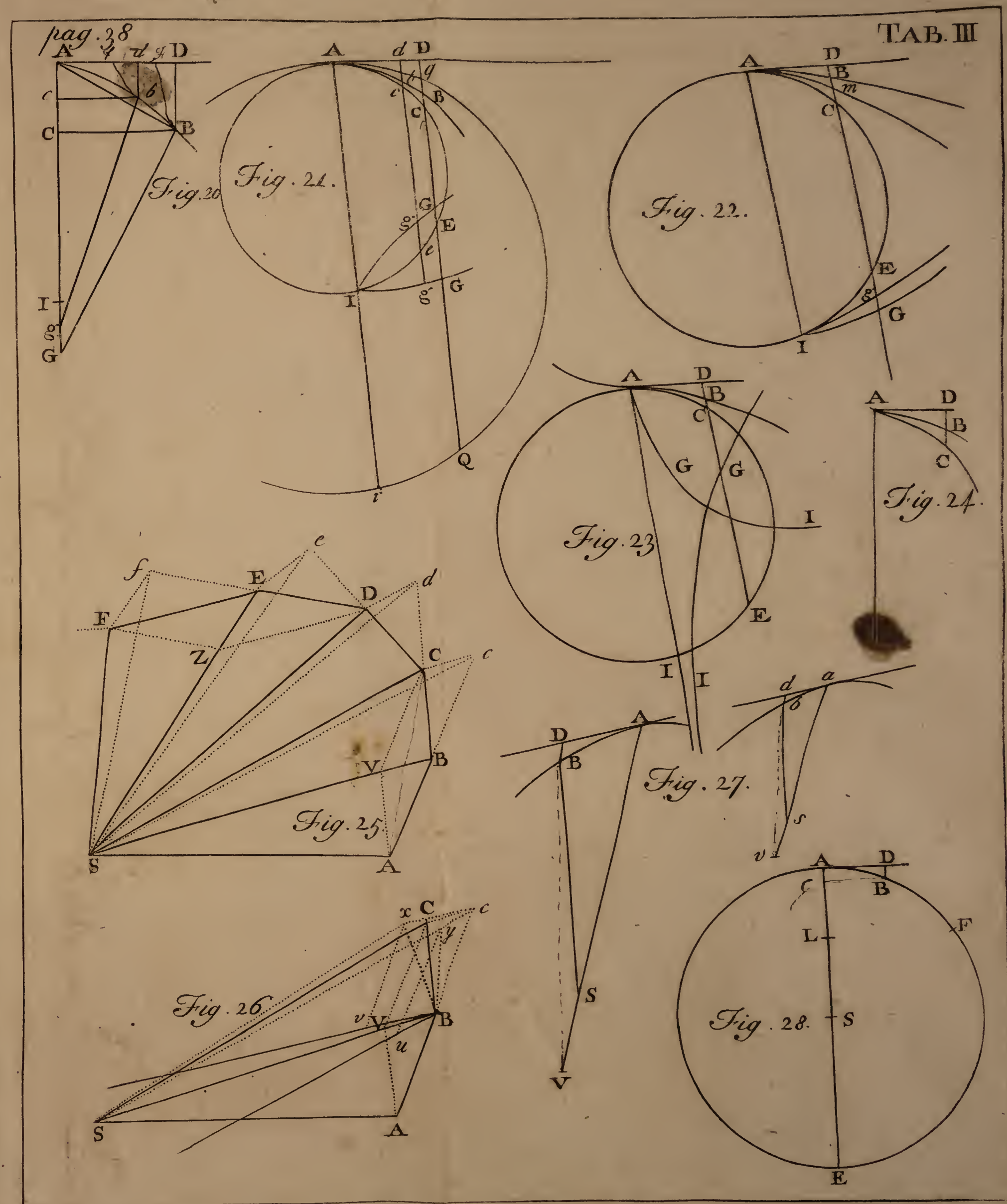
37. *Schol.* Ambitus telluris est 123249600 pedum Parisiensium; unde diameter ejus D est eorundem pedum ferè 39231600; sed et spatium S ad eandem mensuram exactum, est $15\frac{1}{2}$ pedum; ergo prodit tandem \sqrt{DS} pedum Gallicorum

Not. 29. Lem.



Sint AB, ab, similes
 Equam minima
 partes fig: curvil:
 Vc: sint AD, ad, dia-
 metri curvaturæ,
 tum ex Euclidis
 principiis, angulis
 DAV, dav, quæ æqua-
 les sunt inter se, æqua-
 les sunt quoque an-
 gulis ADV, adv,
 hinc Triangula

ABV, adv similia sunt, & propterea VA: AD:: va: vd, atq;
 VA: va:: AB: ad. Q.E.D.



PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, et arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, et sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, et producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe et tempus bis inverse. [b]

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per corol. 4. prop. I.) et augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per corol. 2 et 3, lem. xi.) ideoque est ut vis semel et tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, et fiet vis ut sagitta directe et tempus bis inverse. Q.E.D.

Idem facile demonstratur etiam per corol. 4. lem. x.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam APQ ; tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto

TAB. IV.
FIG. 30.

licorum 24326, Anglicorum 25982, hoc est, milliarium Anglicorum 4,92083. Tanta itaque debet esse velocitas projectilis, quanta sufficiat ad spatium 5 ferè milliarium tempore minuti unius secundi uniformiter percurrendum; unde tempus periodicum projectilis erit unius horæ, 24 minutorum primorum, 27 secundorum. Ex his autem manifestum est quòd si terra nostra revolutiones singulas circa proprium axem spatio unius horæ, 24 minutorum primorum, 27 secundorum perageret, partes omnes juxta æquatorem sitæ gravitatem suam omnino amitterent. Quòd si terra incitatiores adhuc provolveretur motu, aër omnis et aqua et partes omnes juxta æquatorem, terræ non adhærentes, in spacia circumjacentia penitus avolarent, et ibi orbitas ellipticas umbilicos alteros in centro telluris habentes, motu suo describerent, ut in sequentibus luculentius constabit.

[b] 38. Describantur arcus Qq , Kk in eodem tempore t viribus diversis c , C ; et erit $PC:PR::c:C$ [per cor. 4. prop. I]. Describantur arcus Kk , Mm iisdem viribus in temporibus diversis t , T , et erit $PR:PL::Kk^2:Mm^2::t^2:T^2$, ob æquabilem motum per arcus evanescentes Kk , Mm ; his rationibus compositis, fiet $PC:PL::c \times t^2:C \times T^2$, i. e. sagittæ sunt ut vires et quadrata temporum. Eadem valet demonstratio si sumantur sagittæ PC , PL in orbitis diversis.

TAB. IV.
FIG. 29.

SECTIO
SECUNDA.

puncto quovis P , et ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR distantiae SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam illam SP : vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$; si modo solidi illius ea semper fu-

matur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P et Q [°]. Nam QR æqualis est sagittæ dupli arcus QP , in cujus medio est P , et duplum trianguli SPQ sive $SP \times QT$, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendicularum fit a centro virium in orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $SY \times QP$ et $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentrice tangit, aut concentrice secat, id est, angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P ; et si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SYq \times PV$. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$. [d]

Corol. 4.

[c] 39. Sumatur linea, quæ tertia proportionalis est lineis QR , QT , patet $\frac{QT^2}{QR}$ huic lineæ æqualem esse; ideoque quantitatem $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ esse solidum: neque evanescentibus QT , QR solidum hoc evanescit; nam linea, quæ ipsis QR , QT evanescentibus tertia est proportionalis, finita est; ideoque solidum quod conficitur ex hac lineâ in SP^2 ductâ est etiam finita quantitas.

[d] 40. Ex naturâ circuli patet triangula QRP , QPV similia esse; ideoque $QR : QP :: QP : PV = \frac{QP^2}{QR}$.

41. Hinc etiam patet solidum $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ coeuntibus punctis P , Q esse finitum, quoniam æquale est areæ finitæ SY^2 ductæ in lineam finitam PV .

TAB. IV.
FIG. 31.

$$\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$$

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, et chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum SY per corol. 1. prop. 1. [e].

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ , et in ea detur etiam punctum S , ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$, vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce

[e] 42. Notatu dignum est formulas vis centripetæ à Newtono inventas in corollariis 1. 2. 3. non applicari posse ad inveniendas vires centripetas in orbitis diversis, ni areæ, in æqualibus temporibus descriptæ, æquales ponantur in hisce orbitis; substituuntur enim areæ pro temporibus: et proinde hoc corollarium, quatenus à Newtono demonstratur, non applicari potest in comparandis inter se viribus centripetis in orbitis diversis; ponuntur enim areæ temporibus proportionales, et velocitates reciproce ut perpendicularia: attamen ex principiis generalibus sequenti methodo deduci potest. Vis centripeta est semper ut sagitta directè, et tempus bis inversè, vel ut $\frac{QR}{T^2}$; T est ut spatium PQ directè et velocitas V inversè, ergo est T^2 ut $\frac{QP^2}{V^2}$,

et $\frac{QR}{T^2}$ ut $\frac{QR \times V^2}{QP^2}$ (substituendo $\frac{QP^2}{PV}$ pro QR) = $\frac{QP^2 \times V^2}{PV \times QP^2} = \frac{V^2}{PV}$.

43. THEOREMA. Velocitas quâ curva quælibet PQ describitur, æqualis est velocitati, quam acquireret corpus cadendo per quartam partem chordæ curvaturæ PV per centrum virium S transeuntis, si modo vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus in puncto P agitur. DEM. Velocitas, quam corpus hâc vi uniformiter acceleratum per spatium RQ cadendo acquireret, est ad velocitatem quâcum arcus PQ describitur ut $2RQ$ ad PQ ; sit PL spatium per quod corpus cadere debet, ut velocitatem quâcum PQ describitur, acquirat; et erit RQ ad PL ut quadratum velocitatis in Q acquisitæ, ad quadratum velocitatis quâcum describitur PQ , vel ut $4RQ^2$ ad PQ^2 , et proinde $PL = \frac{PQ^2 \times RQ}{4RQ^2} = \frac{PQ^2}{4RQ} = \frac{PV}{4}$.

44. * Ex corollario tertio sequitur vim centripetam esse reciproce, ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$, posito quòd R sit æqualis PC radio curvaturæ. Nam ob si-

milia triacula VPF , SPY , est $SP : SY :: PF$ vel $2R : PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$, et proinde $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$, hoc est ob datum 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$.

TAB. IV.
FIG. 32.

* $rq : pq :: pq : \frac{pq^2}{rq} = \text{diam}$
circ: curvat: per co. g. p. 4
sit $V = \text{vel: quâ arcus } pq \text{ des.}$
bitur. $v = \text{vel: aeq: cad: per r.}$
tum $v : V :: \sqrt{rq} : \sqrt{\frac{pq^2}{4rq}} ::$
 $2rq : pq. (\text{per } 34.)$

TAB. IV.
FIG. 31.

Si $SY^3 \times PV = \frac{SY^3 \times R}{SP}$

SECTIO
SECUNDA.

proce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

7

PROPOSITIO VI. PROBLEMA I.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

TAB. IV.
FIG. 33.

Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S ; corpus in circumferentia latum P ; locus proximus, in quem movebitur Q ; et circuli tangens ad locum priorem PRZ . Per punctum S ducatur chorda PV ; et acta circuli diametro VA , jungatur AP ; et ad SP demittatur perpendicularum QT , quod productum occurrat tangenti PR in Z ; ac denique per punctum Q agatur LR , quæ ipsi SP parallela sit, et occurrat tum circulo in L , tum tangenti PZ in R . Et ob similia triângula ZQR , ZTP , VPA ; erit RP quad. hoc est QRL ad QT quad. ut AV quad. ad PV quad. Ideoque $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT quad. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, et punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL . Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$; id est (ob datum $AV \text{ quad.}$) reciproce ut quadratum distantiae seu altitudinis SP et cubus chordæ PV conjunctim. Q. E. I. [f]

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendicularum SY ; et ob similia triângula STP , VPA ; erit AV ad PV ut SP ad SY .

[f] 45. Si virium centrum extra peripheriam circuli locetur, et duci intelligantur lineæ à centro illo circum tangentes, corpus in concavâ orbitæ parte versatum urgetur vi centripetâ ad centrum illud tendente: urgetur vero vi repulsivâ dum motus peragat in orbitæ partibus quarum convexitas virium centro obvertitur. Attamen notandum est, quamquam ex formulis prædictis lex vis centripetæ vel repulsivæ recte exponatur, corpus vi centripetâ in circuli circumferentia latum, si unquam ad contactûs puncta pervenerit, non amplius in circulo

SY : ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY , et $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æqua-
 le $SY \text{ quad.} \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. et 5. prop. v.) vis
 centripeta est reciproce ut $\frac{SP q \times PV \text{ cub.}}{AV q}$, hoc est, ob datum AV
 reciproce ut $SP q \times PV \text{ cub.}$ Q. E. I.

Corol. 1. Hinc si punctum datum S , ad quod vis centripeta sem-
 per tendit, locetur in circumferentia hujus circuli; puta ad V ;
 erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP .

Corol. 2. Vis, qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium
 centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem
 circulo et eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium
 centrum R revolvi potest, ut $RP \text{ quad.} \times SP$ ad cubum rectæ SG ,
 quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et
 distantia corporis à secundo virium centro parallela est. Nam
 per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim poste-
 riorem ut $RP q \times PT \text{ cub.}$ ad $SP q \times PV \text{ cub.}$ id est, ut $SP \times RP q$
 ad $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$ [g], sive (ob similia triangula PSG , TPV)
 ad $SG \text{ cub.}$

 TAB. IV.
FIG. 34.

Corol. 3. Vis, qua corpus P in orbe quocunque circum virium
 centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem
 orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium
 centrum R revolvi potest, ut $SP \times RP q$, contentum utique sub
 distantia corporis a primo virium centro S et quadrato distantia
 ejus a secundo virium centro R ; ad cubum rectæ SG , quæ a pri-
 mo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et corporis
 a secundo virium centro distantia RP parallela est. Nam vires in
 hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eadem sunt ac in circulo
 ejusdem curvaturæ. PRO-

culo posse moveri, etiamsi vis centripeta in repulsivam verti fingatur: accedet
 enim ad centrum, vel recedet in infinitum, ut perpendicularibus luculenter
 constabit.

[g] 46. Quoniam datur tempus periodicum, daturque area tota per hypo-
 thesin, areæ in æqualibus temporibus descriptæ necessariò æquales erunt;
 sunt enim universaliter ut areæ totæ directè, et ut tempora periodica inversè;
 quare

SECTIO
SECUNDA.

8 PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Moveatur corpus in semicirculo PQA: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes PS, RS ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.

TAB. IV.
FIG. 35.

A semicirculi centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M et N, et jungatur CP. Ob similia triangula CPM, PZT et RZQ est CPq ad PMq ut PRq ad QTq, et ex natura circuli PRq æquale est rectangulo QR × RN + QN, five coeuntibus punctis P et Q rectangulo QR × 2 PM. Ergo est CPq ad PM quad. ut QR × 2 PM ad QT quad. ideoque $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2 PM \text{ cub.}}{CP \text{ quad.}}$, et $\frac{QT \text{ quad.} \times SP \text{ quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2 PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$. Est ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2 PM \text{ cub.} \times SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$, hoc est, (neglecta ratione determinata $\frac{2 SP \text{ quad.}}{CP \text{ quad.}}$) reciproce ut PM cub. Q.E.I.

Idem facile colligitur etiam ex propositione præcedente.

Scholium.

[^h] Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbola vel parabola, vi centripeta, quæ fit quare vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum, et cubi chordarum conjunctim; ideoque vis prior ad vim posteriorem, &c. (42).

TAB. IV.
FIG. 37.

[^h] 47. LEM. Si à conicæ sectionis puncto P ducatur tangenti perpendicularis PA axi occurrens in A, diameter curvaturæ PO per PA³ divisa eadem manet tangenti positione utcunque mutatâ. DEM. Nam fit CD diameter conjugata ipsi CP, quæ producta occurrat PO in F; et erit in ellipsi et hyperbolâ PA × PF data quantitas [Hamilton, Con. Sec. Lib. II. Prop. xxii.] et proinde PA ut $\frac{1}{PF}$; est etiam CD ut $\frac{1}{PF}$ [Ham. L. IV. P. I.], et proinde est

PA ut CD, PA² ut CD², et $\frac{PA^2}{PF}$ vel ei proportionale PA³ ut $\frac{CD^2}{PF} = \frac{PO}{2}$

* Quod $\frac{PA^2}{PF}$ sit proportionale ad PA³ patet hinc. [Ham.]
PA × PF = 1, ergo PA³ × OF = PA² & PA³ = $\frac{PA^2}{OF}$.

fit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

SECTIO
SECUNDA.

9 PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Gyretur corpus in spirali PQS secante radios omnes SP, SQ, &c. [i] in angulo dato; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.

TAB. IV.
FIG. 40.

Detur
[Ham. L. v. P. xviii. Cor.]; et exinde sequitur, esse PA^3 ut PO , et $\frac{PO}{PA^3}$ datam quantitatem.

In ellipsi crescente focorum distantia manet PA^3 ut PO ; et proinde si hæc distantia infinita evadat, vel mutetur ellipsis in parabolam, erit etiamnum PA^3 ut PO .

48. Sit jam BPZ sectio quævis conica, cujus axis est BA , et vis centripeta ad punctum adeo longinquum tendat, ut lineæ omnes PS , RS , pro parallelis haberi possint, sintque ad axem perpendiculares. Sit PA perpendicularis tangenti PT , et ad axem producta; PO diameter circuli curvaturæ, et PV chorda ejus per centrum virium transeuns: ob similia triangula est QT^2 : QP^2 : :: PM^2 : PA^2 , ergo $QT^2 = \frac{QP^2 \times PM^2}{PA^2}$, et $\frac{QT^2}{QR} = \frac{QP^2 \times PM^2}{QR \times PA^2} = PV \times \frac{PM^2}{PA^2}$: sed est $PA:PM::PO:PV = \frac{PO \times PM}{PA}$, quo substituto fit $\frac{PM^3 \times PO}{PA^3} = \frac{QT^2}{QR}$, quod ob datum SP^2 est reciprocè ut vis; est autem $\frac{PO}{PA^3}$ data quantitas per LEM. ideoque manet vis ut $\frac{1}{PM^3}$.

TAB. IV.
FIG. 36.

[i] 49. Revolvatur radius SL circa centrum S motu uniformi, dum punctum P à centro illo recedit velocitate quæ semper proportionalis est distantia: Curva, à puncto P descripta, secant omnes radios in angulo dato. Nam sint radii ST , SR , SP , &c. vicinissimi, et ad æquales ab invicem distantias; patet hosce radios esse in progressionem geometricam; est enim $qR:aT::SP:SR$: sed $qR:aT::qR+SP:aT+SR::SR:ST$; ergo est $SP:SR::SR:ST$; sunt autem anguli PSR , RST æquales per hyp. et proinde triangula PSR , RST similia sunt, et angulus SRP æqualis angulo STR .

TAB. IV.
FIG. 38,
et 39.

50. Si describatur circulus circa centrum S radio ST , arcus circuli rationes radiorum spiralis mensurabunt: sint enim arcus quilibet TL , LO , OW , &c. inter se æquales, et ducantur SL , SO , SW , &c. quoniam ST , SR , SP , &c. sunt in ratione geometrica, ratio ST ad SP est duplicata ipsius ST ad SR ; sed est etiam TO duplus ipsius TL : similiter, ratio ST ad SM est triplicata ipsius ST ad SR , et est etiam TW triplus ipsius TL , et sic deinceps; hinc curva hæc spiralis logarithmica nominatur.

SECTIO
SECUNDA.TAB. IV.
FIG. 40.

Detur angulus indefinite parvus PSQ , et ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque

$\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$ ut QT , hoc est (ob datam specie figuram illam) ut SP .

[^k] Mutetur jam utcumque angulus PSQ , et recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per lemma xi.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT . Ergo manebit $\frac{QT \text{ quad.}}{QR}$

eadem quæ prius, hoc est ut SP . Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut $SP \text{ cub.}$ ideoque (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantiae SP . Q. E. I.

Idem aliter.

[¹] Perpendicularum SY in tangentem demissum, et circuli spiralem concentrice secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque $SP \text{ cub.}$ est ut $SYq \times PV$, hoc est (per corol. 3. et 5. prop. v.) reciproce ut vis centripeta.

PRO-

[^k] 51. Si angulus PSQ angulo pSq non sit æqualis, fiat angulus $PSL = pSq$, eritque $qt : qr :: LM : LN$, et $\frac{qt}{qr} = \frac{LM}{LN}$, et $\frac{qt^2}{qr} : \frac{LM^2}{LN} :: qt : LM :: Sp : SP$; sed ob similia triangula $LM^2 : QT^2 :: LP^2 : QP^2 :: LN : QR$, ideoque $\frac{LM^2}{LN} = \frac{QT^2}{QR}$, et proinde $\frac{qt^2}{qr} : \frac{QT^2}{QR} :: Sp : SP$.

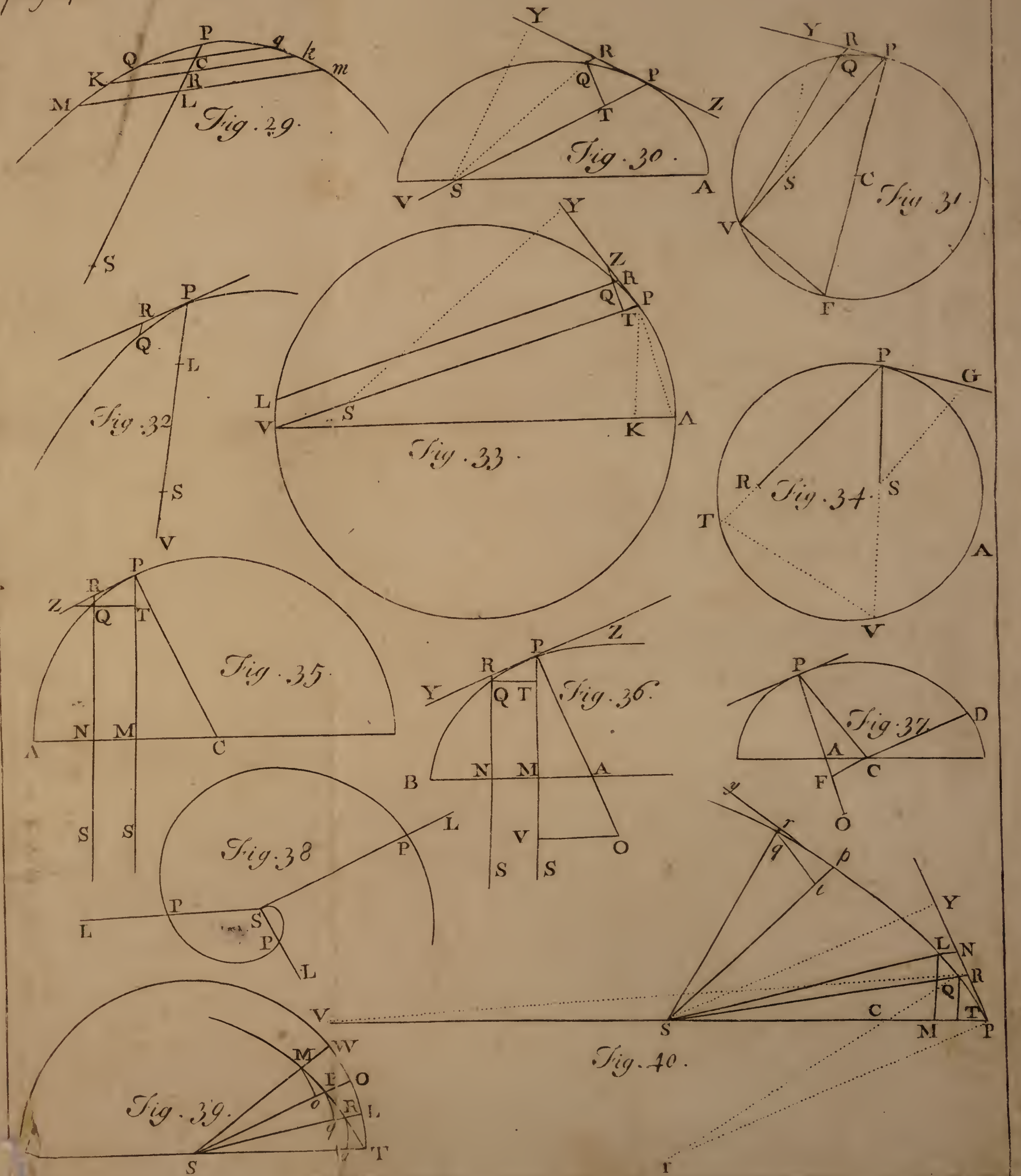
[¹] 52. LEM. Chorda curvaturæ PV per centrum S spiralis logarithmicæ transeuntis æqualis est $2SP$. Sint enim puncta P, Q ad invicem vicinissima; lineæ Pr, Qr perpendiculares ad curvam in his punctis occurrent in centro curvaturæ r : à rectis angulis rPQ, rQL , subducantur anguli æquales $SPQ, S QL$, et erit angulus rPC æqualis angulo CQS , æquantur vero anguli verticales ad C , ergo est angulus $QSP = QR P$; angulus $QR P$ ad centrum circuli æqualis est duplo angulo QVP ad peripheriam, et proinde est $PV : PS :: 2 : 1$.

53. Substituendo $2SP$ pro PV , et SP pro SY , fit solidum $SY^2 \times PV$ proportionale $2SP^3$, et proinde est vis centripeta ut $\frac{1}{SP^3}$.

Solidum est $\frac{SP^2 \times 2T^2}{2R}$. ubi enim (p. 30) 2 coincidat cum R, angulus 2SP evanescit, & Triangula SP2, P2R fiunt similes & $1P : 2T (= 2P) :: 2T : 2R$, igitur $1P = \frac{2T^2}{2R}$, quod solvit nolum.

pag. 46

TAB. IV



Lemma ad hanc Prop: Prop: est-20. l: 2. Sim: Con:

SECTIO
SECUNDA.

10 PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos.

Sunto CA , CB femiaxes ellipseos; GP , DK diametri aliæ conjugatæ; PF , QT perpendiculara ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP ; et si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex conicis)[†] rectangulum PvG ad Qv quad. ut PC quad. ad CD quad. et (ob similia triangula QvT , PCF) Qv quad. est ad QT quad. ut PC quad. ad PF quad. et conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT quad. ut PC quad. ad CD quad. et PC quad. ad PF quad. id est, vG ad $\frac{QT \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC quad. ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$.

TAB. V.
FIG. 41.

Scribe QR pro Pv , et $BC \times CA$ pro $CD \times PF$ [‡], nec non (punctis P et Q coeuntibus) $2PC$ pro vG , et ductis extremis et mediis in se mutuo fiet $\frac{QT \text{ quad.} \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per

corol. 5. prop. v.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est

(ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC . Q.E. I.

Idem aliter.

[^m] In recta PG ab altera parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv ; deinde cape uV , quæ sit ad vG ut est DC quad.

54. Velocitas in spirali logarithmicâ æqualis est velocitati, quâcum corpus eâdem vi centripeta ad eandem distantiam circulum describeret. Patet enim diametrum hujusce circuli æqualem esse chordæ PV [per lem.]; unde velocitates in his orbitis æquales sunt (43 & 34.)

[^m] 55. Aliter. Ex conicis, $Pv \times vG : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$, unde ductis extremis et mediis in se mutuo, et substitutis QR pro Pv , et $2PC$ pro vG , fit QR

SECTIO
SECUNDA.

quad. ad *PC quad.* Et quoniam ex conicis est *Qv quad.* ad *PvG* ut *DC quad.* ad *PC quad.* erit *Qv quad.* æquale *Pv × uV*. Adde rectangulum *uPv* utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcus *PQ* æquale rectangulo *VPv*; ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* et tranfit per punctum *Q*, transibit etiam per punctum *V*. Coëant puncta *P* et *Q*, et ratio *uV* ad *vG*, quæ eadem est cum ratione *DCq* ad *PCq*, fiet ratio *PV* ad *PG* seu *PV* ad *2PC*; ideoque *PV* æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, qua corpus *P* in ellipfi re-

volvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in *PFq* (per corol. 3. prop. v.) hoc est (ob datum *2DCq* in *PFq*) directe ut *PC*. Q.E.I.

Corol. I.

$QR \times 2PC \times CD^2 = Qv^2 \times PC^2$, ceu $\frac{2CD^2}{PC} = \frac{Qv^2}{QR} = PV$; quare *PV* $\times PF^2 = \frac{2CD^2 \times PF^2}{PC}$, et ob datum *2CD^2 × PF^2*, est vis centripeta inversè ut $\frac{1}{PC}$, ceu ut *PC* directè.

56. LEM. Cum diameter curvaturæ *PO* sit ad chordam *PV* ut *PC* ad *PF*, erit $PO = \frac{PV \times PC}{PF}$, sed $PV = \frac{2CD^2}{PC}$, ergo $PO = \frac{2CD^2}{PF}$, et consequenter radius circuli $Pr = \frac{CD^2}{PF}$.

± Pro hac formula vide 44. 57. Hinc Prob. IV. aliter solvitur, nam in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substituat $\frac{CD^2}{PF}$ pro *Pr*, et fit vis centripeta ut $\frac{CP \times PF}{CD^2 \times PF^3} = \frac{CP}{CD^2 \times PF^2}$, hoc est, ob constantem *CD^2 × PF^2* directè ut *CP*.

58. COR. Velocitas in ellipfi est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam, ut semidiameter conjugata *CD* ad distantiam *CP*. Est enim velocitas prior ad posteriorem, in ratione subduplicatâ chordæ curvaturæ *PV* ad diametrum circuli *2CP* (43) hoc est, ut $\sqrt{\frac{2CD^2}{PC}} : \sqrt{2PC} :: \sqrt{2CD^2} : \sqrt{2PC^2} :: CD : PC$.

TAB. V.
FIG. 42.

59. Cor. 2: Hinc velocitas in ellipfi æqualis est velocitati in circulo in quatuor illis locis, in quibus diametri conjugatæ æquales sunt. Æquales vero diametri conjugatæ sequenti methodo inveniuntur: sint *Aa*, *Bb* axes, ducantur

[ⁿ] *Corol. 1.* Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos : et vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

[^o] *Corol. 2.* Et æqualia erunt revolutionum in ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsis similibus æqualia sunt (per corol. 3. et 8. prop. iv.) in ellipsis autem communem habentibus axem majorem sunt

ad

α tur BA , Ba , et patet ex conicis lineam CP , quæ bifecat BA in O ; æqualem esse lineæ CD ; quæ bifecat Ba in n : patet præterea BA et ab , Ba et Ab esse inter se parallelas, ideoque CP , CD esse diametros conjugatas.

60. Quoniam velocitas in ellipsi est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam, ut semidiameter conjugata ad distantiam, et velocitas in hoc circulo ad velocitatem in quavis aliâ ellipsi ad eandem distantiam, ut distantia illa ad conjugatam diametrum in ellipsi posteriori, erunt velocitates in his ellipsis, datâ distantia, ut semidiametri conjugatæ.

[ⁿ] 61. Projiciatur corpus à puncto P datâ cum velocitate, secundum datam directionem $P\mathcal{Y}$, et sit vis centripeta in directâ simplici ratione distantia à centro C ; si $P\mathcal{Y}$ sit ad PC perpendicularis, et velocitas projectionis æqualis velocitati quam corpus P acquireret cadendo per $\frac{1}{2} PC$, vi in P perpetuò agente, orbita erit circulus cujus centrum est C . Si vero alia sit velocitas, vel si $P\mathcal{Y}$ non sit ad PC perpendicularis, ob datas vim atque velocitatem in puncto P datur chorda curvaturæ PV ; inveniatur media proportionalis inter CP et $\frac{PV}{2}$, et huic æqualis ponatur CD parallela ipsi $P\mathcal{Y}$, et diametris conjugatis CD ,

CP describatur ellipsis: patet per Prop. x. hanc ellipsin describi posse, cum vi quæ est ut distantia: patet præterea velocitatem, lineam directionis, ac vim in hac ellipsi, easdem esse ac in orbitâ quam P describit; quare corpus P necessariò moveri incipiet, eodem modo ac corpus revera in ellipsi movetur: proximum igitur punctum est punctum in ellipsi, et velocitas, linea directionis, et vis; eadem sunt in hoc puncto ac in ellipsi, corpora igitur eodem modo pergent moveri in proximo arcu, et sic deinceps.

[^o] 62. *Aliter.* Tempus periodicum est ut area tota, vel ut rectangulum sub axibus directe, et ut area dato tempore descripta inversè, i. e. ut $\frac{CD \times PF}{\mathcal{Q}P \times PF} = \frac{CD}{\mathcal{Q}P}$; sed est $\frac{\mathcal{Q}P^2}{\mathcal{Q}R} = PV = \frac{2CD^2}{CP}$; ergo est $\mathcal{Q}P^2 = \frac{2CD^2 \times \mathcal{Q}R}{CP}$; $\mathcal{Q}R$, vel vis centripeta est per hypothesein ut CP , quare $\mathcal{Q}P^2$ est ut CD^2 , $\mathcal{Q}P$ ut CD , et $\frac{CD}{\mathcal{Q}P}$ data quantitas.

G

$\propto \text{Ham. C: S. L: 4. p: 5.}$

TAB. V.
FIG. 43.

$$\frac{2CD^2}{PC} = \frac{2v^2}{2R} = PV$$

$$\frac{2CD^2}{PC} = PV$$

$$CD = \sqrt{\frac{PV \times PC}{2}}$$

TAB. V.
FIG. 41.

$$\frac{2P^2}{2R} = \frac{2v^2}{2R} = \frac{2CD^2}{PC}$$

SECTIO
SECUNDA.

ad invicem ut ellipsion areæ totæ directæ, et arearum particulæ simul descriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directæ, et corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores directæ, et ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſe; et propterea (ob æqualitatem rationum directarum et inverſarum) in ratione æqualitatis. *c.*

Scholium.

Si ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; et viſ ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi conſiſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi attractiva in repulſivam verſa. [P] Et quemadmodum in circulo

TAB. V.
FIG. 44.

[P] 63. *Sunto AP , Ap duæ lineæ curvæ communem habentes verticem A , abſciſſamque communem AQ ; ea vero ſit harum curvarum indoles, ut actâ communi ordinatâ QpP , ordinata QP ſit ſemper ad ordinatam Qp in datâ ratione. Revolvantur jam in his figuris duo corpora P et p vi centripetâ tendente ad punctum quodvis S in abſciſſâ communi AQ eâve productâ conſtitutum; ſintque corporum P , p tempora periodica æqualia: dico, vim centripetam in loco P fore ad vim centripetam in loco p , ut diſtantia SP ad diſtantiam Sp . Primò enim cùm tempora periodica æquantur, areæ ſimul deſcriptæ erunt ut areæ totæ harum figurarum, hoc eſt, in ratione QP ad Qp . Jam vero figura mixtilinea APQ erit ad figuram mixtilineam ApQ , ut QP ad Qp ; et triangulum SPQ erit ad triangulum SpQ etiam in ratione QP ad Qp ; ergo, componendo, erit area mixtilinea ASP ad aream ASp ut QP ad Qp : quare, quo tempore radius SP percurrit aream ASP , radius Sp percurrent aream ASp ; adeoque ſi corpora P et p ſimul exeant de loco A , ſimul pervenient ad ordinatam communem QpP . Quare motus corporum P et p ſecundùm rectas ipſi AS parallelas agentes, æquales erunt. Porro cum QP ſemper ſit ad Qp in datâ ratione, motus et motuum mutationes, et vires mutant ſecundùm rectas ipſi QP parallelas agentes, ſemper erunt in datâ ratione QP ad Qp . Referat jam SP vim centripetam corporis P in loco quovis P , et reſolvi poteſt viſ SP in vires QP , QS ; ergo viſ centripeta corporis p exprimi debet per rectam Sp ; quare viſ centripeta in loco P eſt ad vim centripetam in loco p , ut diſtantia SP ad diſtantiam Sp . Q.E.D.

Servatis ordinatarum QP , Qp longitudinibus, mutetur jam angulus SQp ne ordinatæ QP , Qp amplius jaceant in eâdem rectâ; et applicari poteſt præcedens demonſtratio ad hunc caſum, ſimiliter atque ad priorem; hoc eſt, corpora

circulo vel ellipfi si vires tendunt ad centrum figuræ in absciffa positum; hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quacunque data, vel etiã mutando angulum inclinationis ordinatarum ad absciffam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in absciffa positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

PROPOSITIO X. THEOREMA VI.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiae locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates et spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis et sinibus versis respectively proportionales [q].

Corol. I.

corpora P et p simul pervenient ad ordinatas QP , Qp , et vis centripeta in loco P erit ad vim centripetam in loco p adhuc ut distantia SP ad distantiam Sp . Q. E. D.

[q] 64. Si corpus non cadat perpendiculariter, describet ellipsin [Cor. i. p. ix.] centrum habentem in centro virium. Sit ARP ellipsis illa, et centrum ejus S : super hujus semiaxe majori AS describatur quadrans circuli ADE , et per corpus decidens transeat recta CPD ad AS perpendicularis, actisque DS , PS , erit area ASD areæ ASP , ideoque etiam tempori proportionalis. Manente semiaxe AS minuatur perpetuò latitudo ellipseos, et semper manebit area ASD tempori proportionalis: minuatur latitudo illa in infinitum, et orbe ARP jam coincidente cum AS , descendet corpus in rectâ AS , et area ACD , ceu arcus AD evadet tempori proportionalis. Ducatur jam cd parallela et quàm proxima ipsi CD , et velocitas quâ describitur lineola Cc erit ut spatium directè et tempus inversè, vel ut $\frac{Cc}{Dd}$, i. e. ut $\frac{Dr}{Dd}$, actâ Dr parallelâ Cc , vel, ob similia triangula, ut $\frac{CD}{SD}$, et ob datum SD ut sinus rectus CD . Patet vero corpus describere finem versum AC .

TAB. V.
FIG. 45.

ASD

SECTIO
SECUNDA.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S , et corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem ADE .

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuscumque ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. 3. prop. IV.) æquantur [r].

39 §:7.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA V.

Posita cujuscunque generis vi centripeta, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendents tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

TAB. V.
FIG. 46.

De loco quovis A in recta $ADEC$ cadat corpus E , deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG , vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem EG ipso motus initio cum perpendiculari AB , et erit corporis velocitas in loco quovis E ut recta, quæ potest aream curvilineam $ABGE$. Q. E. I.

In EG capiatur EM rectæ, quæ potest aream $ABGE$, reciproce proportionalis, et sit VLN linea curva, quam punctum N perpetuo tangit, et cujus asymptotos est recta AB producta; et erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam AE , ut area curvilinea $ABTVNE$. Q. E. I.

Etenim in recta AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, fitque DLF locus lineæ EMG , ubi corpus versabatur in D ; et si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream $ABGE$, fit ut descendents velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D et E , scribantur V et $V + I$,

[r] 65. Si linea AS in semicycloidem vulgarem permutetur, manente longitudine, et lege vis centripetæ, patet tempora et velocitates eodem modo representari posse siue corpus in curvâ cycloidali, siue in lineâ rectâ descendat; et proinde tempora omnia, quibus corpora à locis quibuscumque ad punctum infimum descendunt, esse æqualia: vires enim acceleratrices sunt directè ut distantie ab hoc puncto.

$V + I$, erit area $ABFD$ ut VV , et area $ABGE$ ut $VV + 2VI + II$,
 et divisim area $DFGE$ ut $2VI + II$, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI + II}{DE}$,
 id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, lon-
 gitudò DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus
 dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit
 lineolam DE , ut lineola illa directe et velocitas V inverse, estque vis
 ut velocitatis incrementum I directe et tempus inverse, ideoque si
 primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est ut longitu-
 do DF . Ergo vis ipsi DF vel EG proportionalis facit ut corpus
 ea cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream
 $ABGE$. Q. E. D. [s].

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE
 describatur, sit ut velocitas inverse, ideoque inverse ut linea recta
 quæ potest aream $ABFD$; sitque DL , atque ideo area nascens
 $DLME$, ut eadem linea recta inverse: erit tempus ut area DL
 ME , et summa omnium temporum ut summa omnium arearum,
 hoc est (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea AE descri-
 bitur ut area tota $ATVME$. Q. E. D.

Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente
 aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravi-
 tas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam cor-
 pus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D , et in per-
 pendiculari DF capiatur DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis
 ad vim alteram in loco D , et compleatur rectangulum $PDRQ$, ei-
 que

[s] 66. Propositionis hujusce tantummodo conversam Newtonus demonstrare
 videtur; ex demonstratis vero facillimè ipsius propositionis veritas deduci po-
 test. Probatur nimirum, posito quòd quadratum velocitatis areæ proportionale
 sit, vim ipsam per lineam DF representari; si igitur, lineam DF vim represen-
 tante, velocitatis quadratum non sit ut area $ABFD$, representari fingatur qua-
 dratum velocitatis per aream $ABKD$ majorem vel minorem aream $ABFD$, et
 prodibit ex Newtoni demonstratis vis ut linea DK , quæ major est vel minor
 lineam DF , contra hypothesin.

 TAB. V.
FIG. 47.

SECTIO
SECUNDA.

que æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2VI$, ideoque ut $\frac{1}{2} V$ ad I , id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; et similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF, DR , ideoque ut areæ nascentes $DFGE, DRSE$; erunt ex æquo areæ totæ $ABFD, PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, et propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, et detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e , erigendo ordinatam eg , et capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta quæ potest rectangulum $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum $PQRD$.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD +$ vel $- DFge$, et capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P , et cadendo pervenit ad D , ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in subduplicata ratione PD ad PE , id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, et divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE , ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De , ut area $DLME$ ad aream $DLme$, et ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

PRO-

40 §. 8.

PROPOSITIO XII. THEOREMA VII.

Si corpus, cogente vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, et corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E , ad centrum C , et moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$. Centro C intervallis quibufvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D et E , curvæque VIK in I et K , occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N ; et in IK demittatur perpendicularum NT ; fitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, et habeant corpora in D et I velocitates æquales. Quoniam distantiae CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D et I æquales. Exponentur hæ vires per æquales lineolas DE, IN ; et si vis una IN (per legum corol. II.) resolvatur in duas NT et IT , vis NT , agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendiculararem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectû producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera IT , secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ) sunt ut lineæ DE, IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE et IK describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ DE et IK , ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE et IK , sunt ut DE et IT , DE et IK conjunctim, id est ut DE quad. et $IT \times IK$ rectangulum. Sed

rectangulum

TAB. V.
FIG. 48.

SECTIO
SECUNDA.

rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, hoc est, æquale DE quad. et propterea accelerationes in transitu corporum a D et I ad E et K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in E et K : et eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentiis æqualibus distantis. Q. E. D.

Sed et eodem argumento corpora æquivelocia et æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politissimo et perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, et corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel impedimento vasis absolute lubrici idem præstatur quod vi transversa NT . Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectory quacunque revolvens, deque quovis trajectory puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, et vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet A^{n-1} , cujus index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas recta ascendentis ac descendens (per prop. XI.) est in hac ipsa ratione.

TAB. V.
FIG. 46.

Ex tribus novissimis propositionibus sequentia facillime deducuntur.

67. Si cadat corpus à loco A versus centrum virium C , et vis centripeta sit constans; patet aream $ABGE$ esse rectangulum; et quadratum velocitatis ob datam altitudinem ut basis AE . Exinde sequitur velocitatem acquisitam in hoc casu esse in subduplicatâ ratione spatii descripti.

TAB. V.
FIG. 49.

68. Si cadat corpus à loco A versus centrum virium C ; et vis centripeta sit in directâ simplici ratione distantiae ab hoc centro, atque erigantur semper perpendiculares AB , EG proportionales distantis AC , EC , erunt puncta C , G , B , in eâdem rectâ lineâ: dividatur jam trapezium $ABGE$, in triângula AEB , EBG ,

EBG , et erit area ejus ut $AB \times AE + EG \times AE$, seu ut $AC \times AE + EC \times AE = AC + EC \times AE = ED^2$, si ED sit sinus rectus circuli, centro C et radio CA descripti; est igitur velocitas in E acquisita ut rectus sinus ED .

69. Hinc patet, quod si corpus vi agitatum quæ variatur in directâ ratione distantiae rectâ à peripheriâ circuli ad centrum descendat, acquirat illud velocitatem illam quâ in circulo movetur; sit enim AB vis centripeta in loco A , sitque AE æqualis dimidio radio circuli AD , et compleatur rectangulum $ABRE$, patet velocitatem in circulo AD esse ut radix quadratica areæ $ABRE$ (34 ~~prop. xi~~), erigantur perpetuò perpendiculara EG quæ sunt ad AB , ut distantiae EC ad AC , et compleatur triangulum ABC ; erit area ejus æqualis areæ rectanguli $ABRE$, unde (per cor. 1. prop. XI) C locus est ad quem descendet corpus, ut acquirat velocitatem æqualem velocitati in circulo.

70. Hinc etiam determinari potest altitudo ad quam corpus ascendet si sursum projiciatur à loco A eâ cum velocitate quâ circulus describitur, et interea agitetur vi quæ est in directâ ratione distantiae à centro: iisdem enim positis, erigatur semper perpendicularis ab , quæ sit ad AB , ut aC ad AC , et compleatur trapezium $abBA$ æquale rectangulo $ABRE$, erit a altitudo ad quam corpus ascendet (per cor. 1. prop. XI.) est autem area trianguli Cab ad aream trianguli CAB ut 2 ad 1 (per Hyp.), et ob similia triangula, ut Ca^2 ad CA^2 , unde est $Ca : CA :: \sqrt{2} : 1$.

71. Ex his datur etiam altitudo ad quam corpus ascendet, si sursum projiciatur à puncto quovis in ellipsi eâdem velocitate quâ peripheria ejus vi ad centrum tendente describitur, posito quod in ascensu suo agitetur vi quæ variatur in directâ ratione distantiae. Patet enim (ex prop. XII.) corpus à diversis orbitæ cujusvis punctis hoc modo projectum, ad eandem semper altitudinem à centro virium ascendere: determinetur altitudo in casu illo in quo velocitas æqualis est velocitati in circulo ad eandem distantiam, et data erit in omni alio. Inveniantur igitur æquales conjugatæ semidiametri CD, CK (59), et erit altitudo Cd ad CD ut $\sqrt{2}$ ad 1. (70).

72. Altitudo Cd , ad quam corpus rectâ projectum ascendit, æqualis est lineæ BA quæ jungit vertices axium. Nam (ex conicis) est rectangulum $DEG : BE^2 :: DC^2 : CK^2$, sed $DC^2 = CK^2$, ergo rect. $DEG = BE^2$, sed rect. $DEG = CD^2 - CE^2$ (per El. II. 5.) ergo $BE^2 = CD^2 - CE^2$, et $CD^2 = BE^2 + CE^2 = 2BE^2$, quare $2CD^2 = 4BE^2 = BA^2$, unde $BA : CD :: \sqrt{2} : 1$, et $BA = Cd$.

73. Ex his sequitur circulum altitudinis transire per puncta intersectionum tangentium illarum quæ per vertices axium ellipsis ducuntur.

SECTIO

 SECUNDA. $AE : ED :: ED : AC + EC$

 TAB. V.
FIG. 50.

$$BA^2 : CD^2 :: 2 : 1.$$

$$BA : CD :: \sqrt{2} : 1.$$

SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROOEMIUM.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres fere classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates específicas et occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* et Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem vero formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertosque situs et motus; quin et fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglecta rerum constitutione vera: quæ sane frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesebus; etiam si deinde secundum leges mechanicas accuratissime

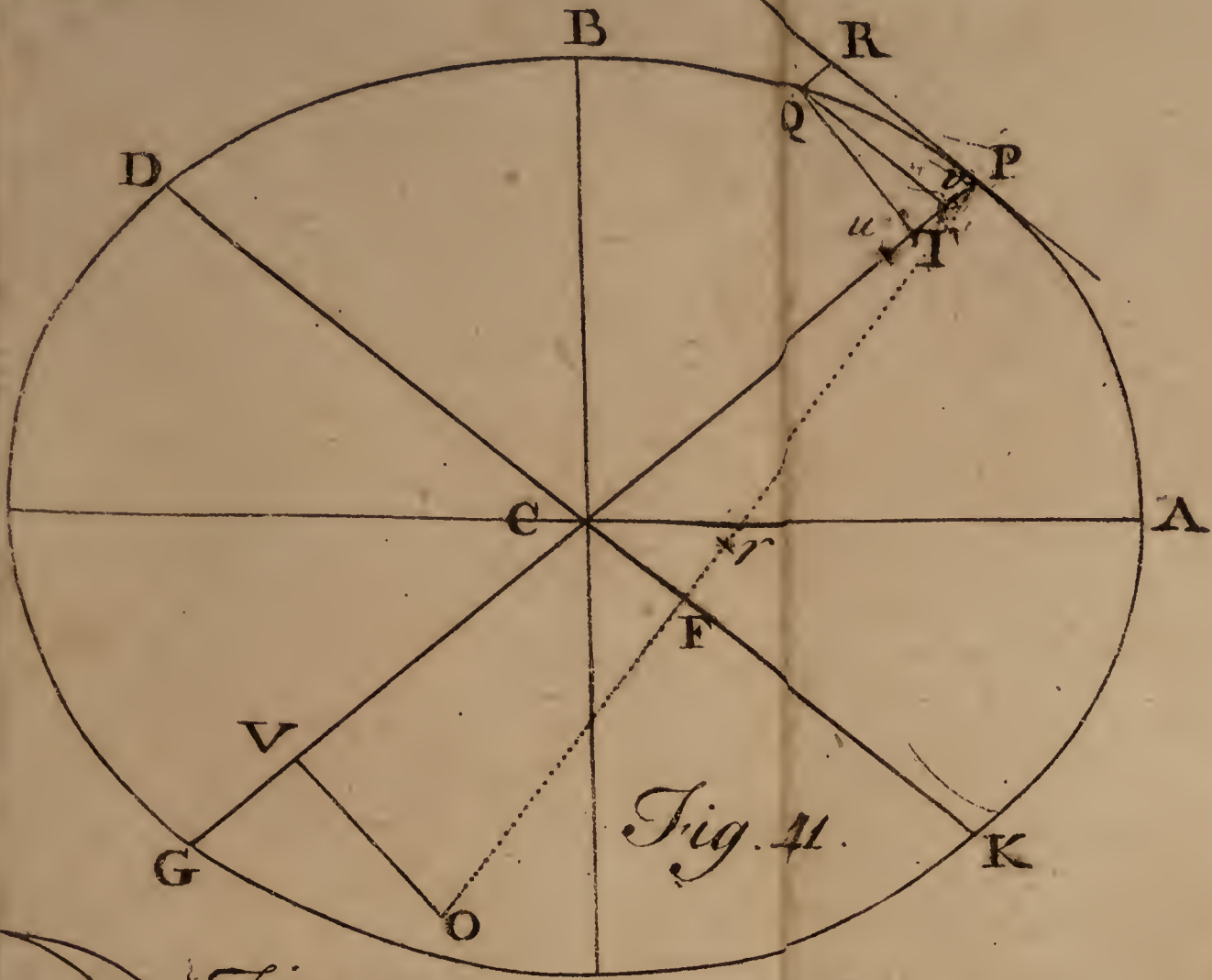


Fig. 41.

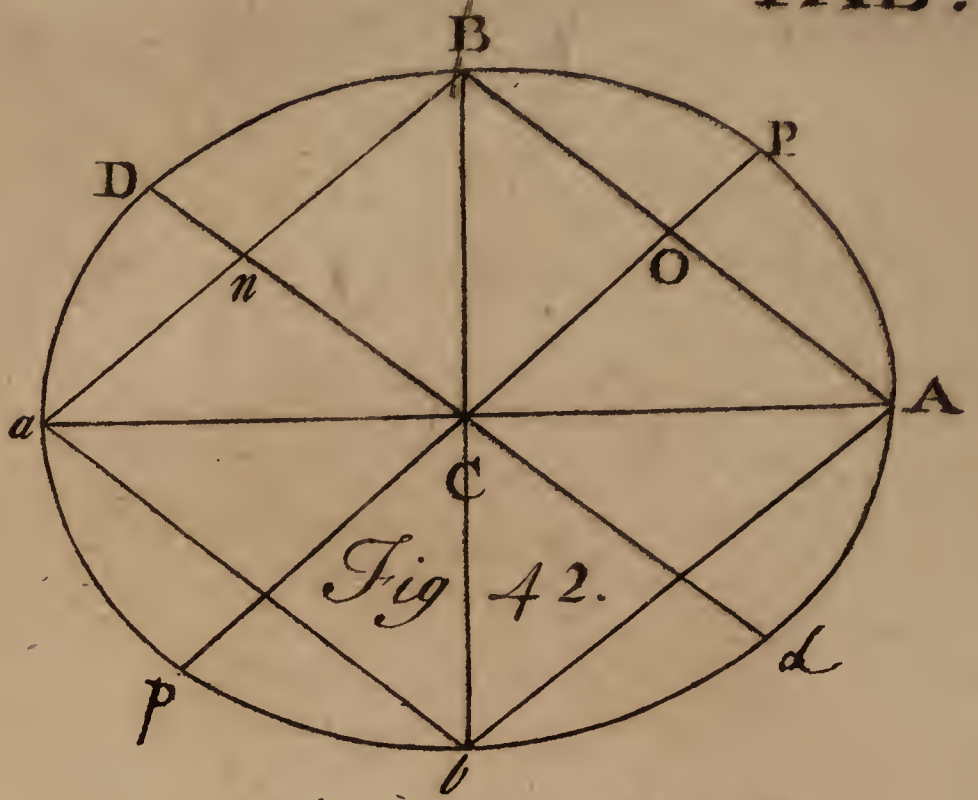


Fig. 42.

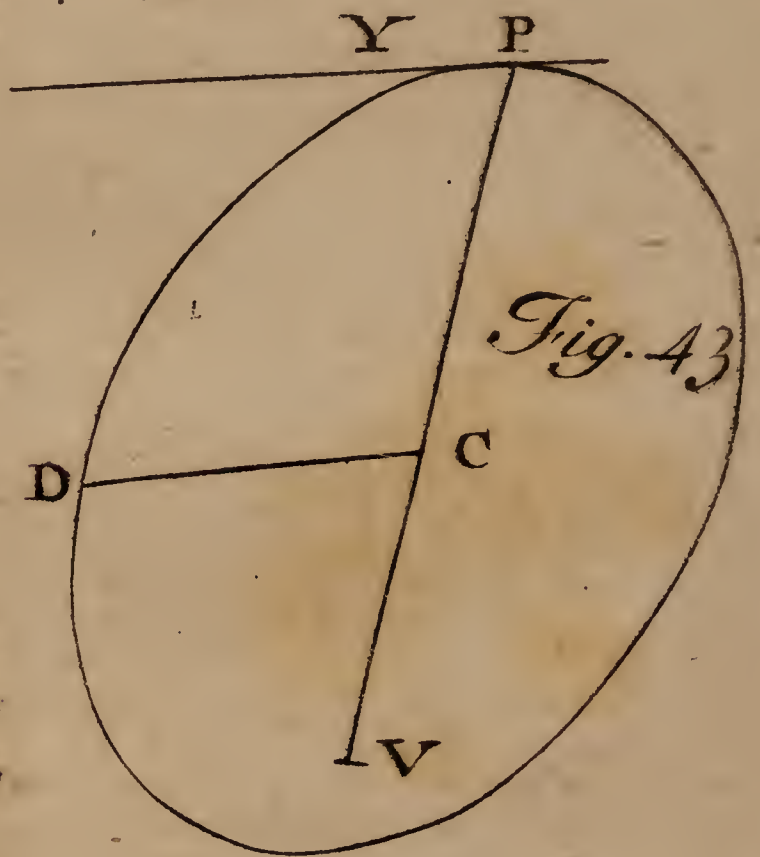


Fig. 43.

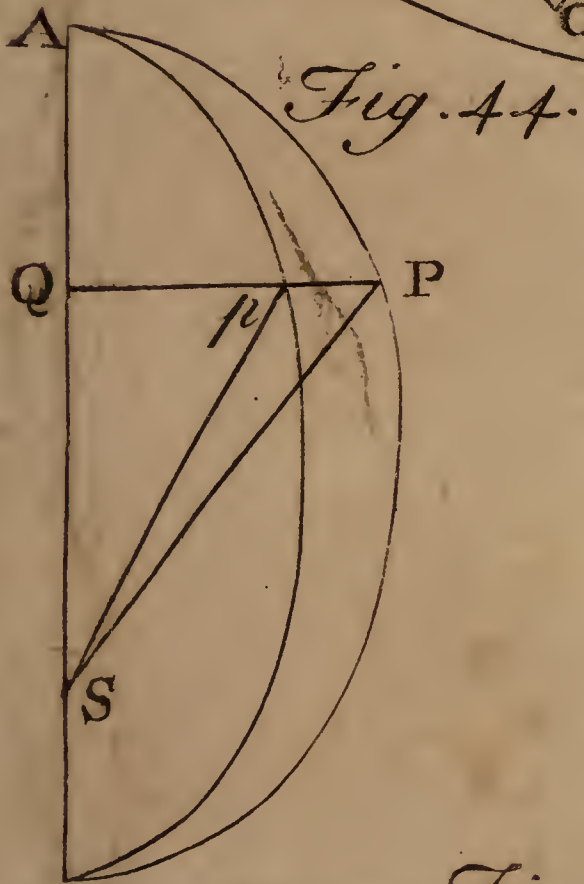


Fig. 44.

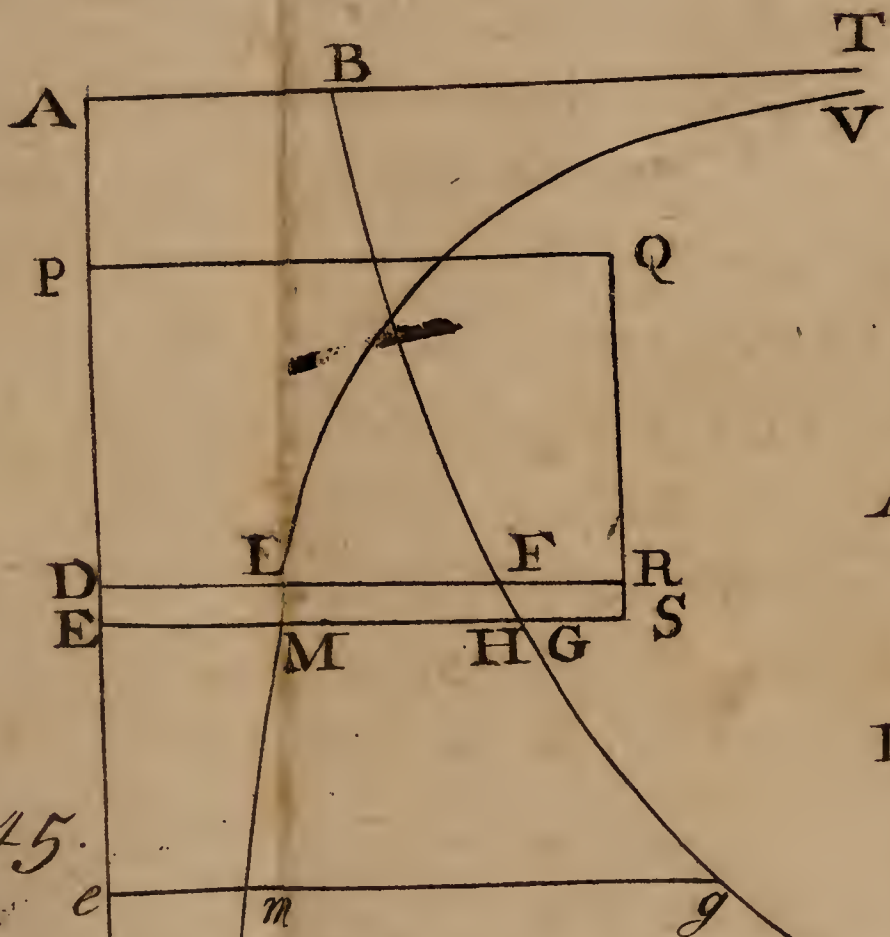


Fig. 45.

Fig. 46.

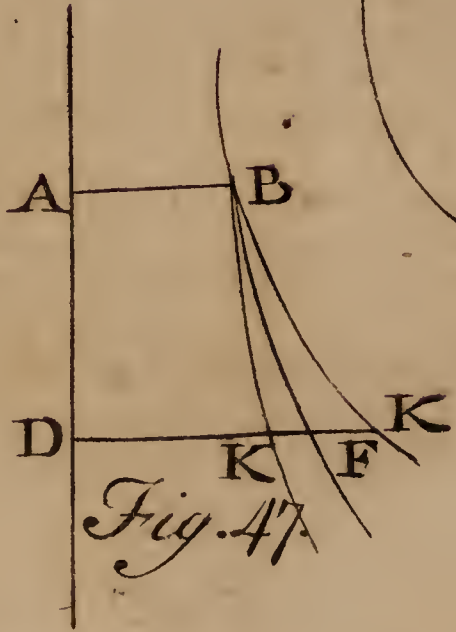


Fig. 47.

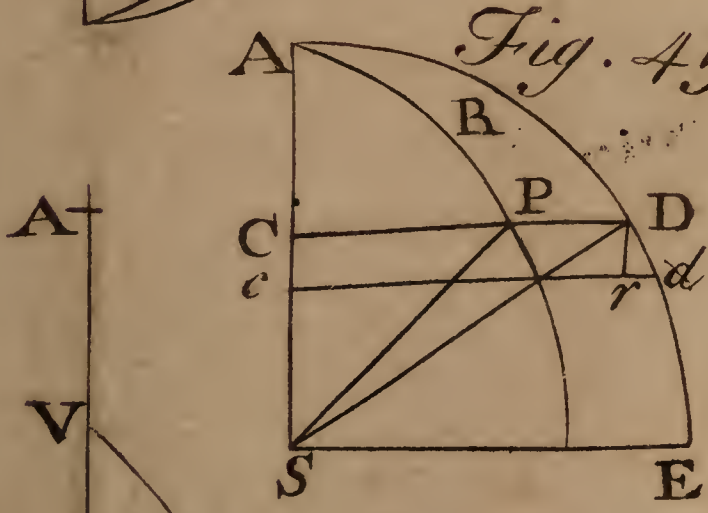


Fig. 48.

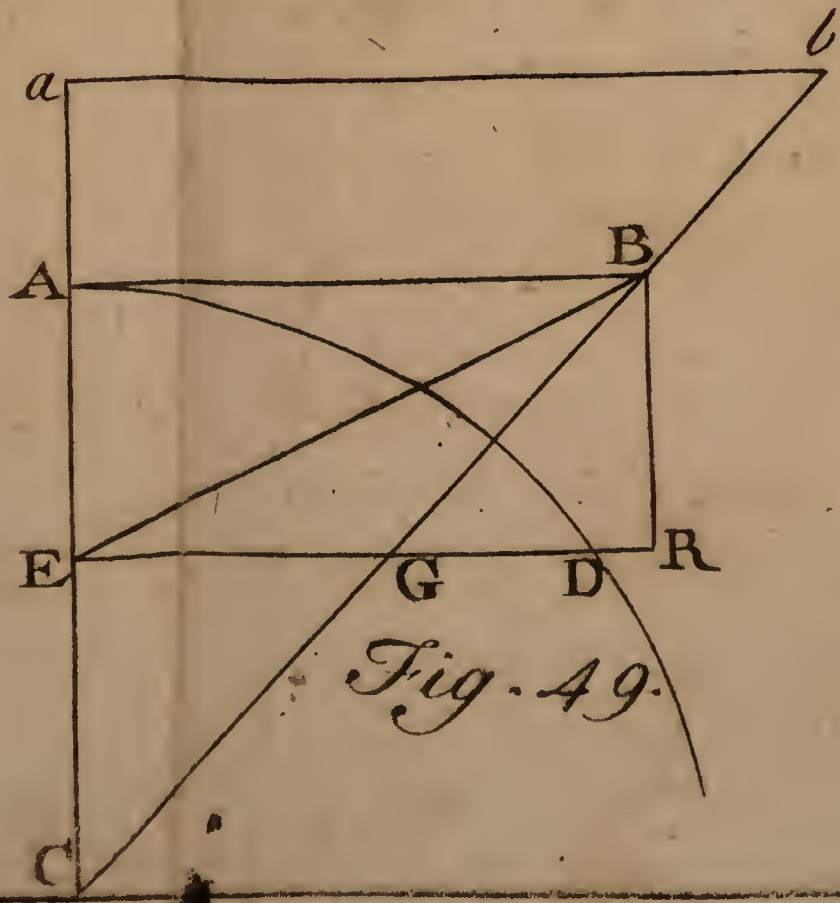


Fig. 49.

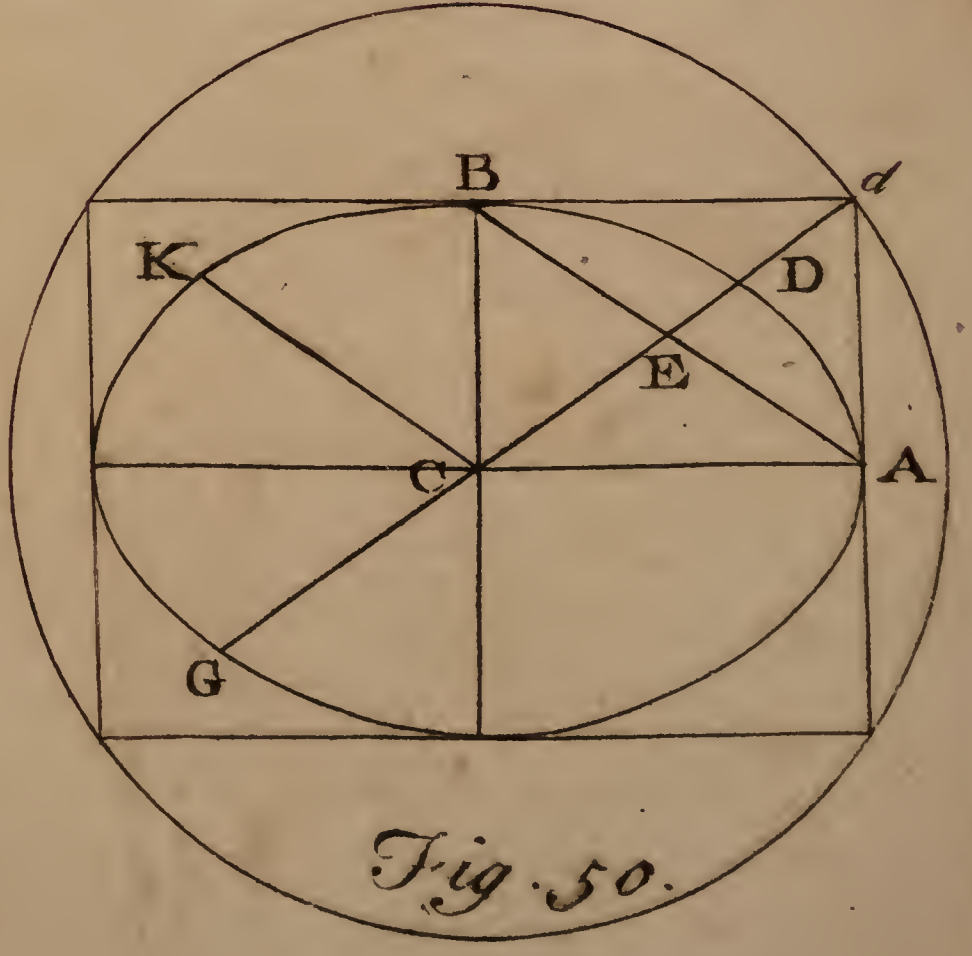


Fig. 50.

ratissime procedant; fabulam quidem elegantem forte et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analytica et synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analytin deducunt, ex quibus deinde per synthetin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longe optima, quam præ cæteris merito amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit in qua excolenda atque adornanda operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem e theoria gravitatis felicissime deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille et solus ex apparentiis demonstrare potuit, et speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Ut argumenti sumatur exordium a simplicissimis et proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissime a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; et oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutua et utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatür terræ totius moles in binas quascunque partes vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia;

SECTIO
TERTIA.

cederet pondus minus majori, et partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam et utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram et terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo et componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cælis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde vero sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque
adeo

adeo de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus necessario aderit vis aliqua, per cuius actiones repetitas indefinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur et certissime demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano descripta, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcunque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios vero circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, qua perpetuo detorquentur a tangentibus rectilineis et in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitalium centris. Hæc itaque vis non inepte vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; a quacunque demum causa oriri fingatur.

Quin et hæc quoque concedenda sunt, et mathematice demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, et quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum*.

Similiter si corpora plura in ellipsis diversis circa centrum virium commune revolvantur et quadrata temporum periodicorum sint ut cubi mediocrium à centro virium distantiarum, in hac sectione geometricè demonstratur vires centripetas tendentes ad hoc
centrum

* Phænomenon 1. *Planetarum quinque primariorum, et vel solis circa terram vel terræ circa solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ mediocrium distantiarum à sole.*

Hæc à Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eademque orbium dimensiones, sive sol circa terram sive terra circa solem revolvatur, ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astronomos universos, magnitudines autem orbium Keplerus et Bullialdus omnium diligentissime ex observationibus determinarunt: et
distantiæ

SECTIO
TERTIA.

centrum in communi omnium ellipsium foco locatum, esse reciproce in duplicata ratione distantiarum. Hoc autem nunc pro concessio habeatur.

Ex

distantiæ mediocres quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibilibiter à distantis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermedia; uti in tabulâ sequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa solem, respectu fixarum, in diebus et partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♂	♀	♂
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.	

Planetarum ac telluris distantia mediocres à sole.

	♄	♃	♂	♁	♀	♂
Secund. Kep:	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secund. Bull.	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Sec. temp. per.	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De distantis Mercurii et Veneris à sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes à sole determinentur.

De distantis etiam superiorum planetarum à sole tollitur omnis disputatio per eclipses satellitum Jovis. Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ et geocentricâ inter se collatis determinatur distantia Jovis.

Phæn. 2. *Tempora periodica Planetarum circumjovialium, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

Orbes horum Planetarum non differunt sensibilibiter à circulis Jovi concentricis. Eorum vero tempora periodica esse in sesquuplicatâ ratione semidiametrorum orbium consentiunt astronomi; idem etiam ex tabulâ sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica

$1^{\text{d}}.18^{\text{h}}.27'.34''.$ $3^{\text{d}}.13^{\text{h}}.13'.42''.$ $7^{\text{d}}.3^{\text{h}}.42'.36''.$ $16^{\text{d}}.16^{\text{h}}.32'.9''.$

Distantia Satellitum à centro Jovis.

Ex observationibus	1	2	3	4	} Semidiam. Jovis.
Borelli	$5 \frac{2}{3}$	$8 \frac{2}{3}$	14	$24 \frac{2}{3}$	
Townlei per microm.	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini per telescop.	5	8	13	23	
Cassini per eclips. satell.	$5 \frac{2}{3}$	9	$14 \frac{23}{60}$	$25 \frac{3}{10}$	
Ex temp. Period.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Phæn. 3.

Ex iis quæ hæcenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuo agentem : constat vim illam dirigi semper versus orbitalium centra : constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem : et augeri quidem in eadem proportionem qua diminuitur quadratum distantiae, diminui eadem proportionem qua distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas et vim gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc et inde leges eadem, eademque affectiones. Primo itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus : hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versus terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a luna per idem tempus descripti finiri verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur ; atque adeo computari potest ex datis tum lunæ tempore periodico, tum distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit

Phæn. 3. *Tempora periodica Planetarum circum Saturniorum, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplacatâ distantiarum ab ipsius centro.*

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum à centro Saturni et periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.18'.27''$. $2^d.17^h.41'.22''$. $4^d.12^h.25'.12''$. $15^d.22^h.41'.14''$. $79^d.7^h.48'.00''$.

Distantiæ Satellitum à centro Saturni in semidiametris annuli.

Ex observ. $1 \frac{1}{2}$ $2 \frac{1}{2}$ $3 \frac{1}{2}$ 8. 24.

Ex temp. per. 1,93. 2,47. 3,45. 8. 23,35.

SECTIO
TERTIA.

docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo[†], spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ, ad orbitæ^{Lunæ} semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam prope terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in terram caderent quam ex vi sola gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, qua luna perpetuo de tangente vel trahitur vel impellitur et in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin et actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac philosophia, ubi agitur de maris æstu et æquinoctiorum præcessionem, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundis. Hinc et illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis gravitatis decrescat in majoribus a tellure

[†] Colligitur hoc ex calculo per corollarium nonum propositionis quartæ confecto. Nam arcus illius, quem luna tempore unius minuti primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{2}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{5}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ distantie ratione inversâ, ideoque ad superficiem terræ major sit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus, vi illa in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{2}$, et spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{2}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{5}$. Et eadem vi gravia reverâ descendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium et linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit *Hugenius*. Et altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*): ideoque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{4}{5}$: et propterea vis quâ luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus.

lure distantis. Nam cum gravitas non diversa sit a vi centripeta lunari, hæc vero sit reciproce proportionalis quadrato distantiae; diminuetur et gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem et secundariorum circa Jovem et Saturnum sunt phaenomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versus centrum solis, secundariorum versus centra Jovis et Saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centrīs, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiae a terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, et terra vicissim in lunam, sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos et primarii vicissim in secundarios; sic et omnes primarii in solem, et sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat et universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, et sol in ipsos.

Solis virtutem attractivam quoque universum propagari ad ingentes usque distantias, et sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissime colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, et nonnunquam adeo ad ipsum proxime accedunt, ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem seculo feliciter inventam et per observationes certissime demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, et radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero phaenomenis manifestum est et mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeo solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in da-

SECTIO
TERTIA.

tis distantibus et in eodem fere plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cælorum regionibus et in diversissimis distantibus positos pertingit.

Conclusiones præcedentes huic innituntur axiomati, quod a nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas et easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensus lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem et terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis et terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera et ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possumus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes et experimenta: inde vero non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia et impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem plane modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt et mobilia et impenetrabilia: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas non-

dum

dum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, et impenetrabilitatem.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ et ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon et hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesi* dogmatibus pugnare et vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus Opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ

SECTIO
TERTIA.

sophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverâ sit instructum pondere; ridebitur qui fingit elaterem, et ex hypothese sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non abfimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indefinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothefibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, et veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverâ existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit et meritò deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiam si id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem et clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento refarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum et cometarum circa solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata et vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, et eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiæ. Constat verò planetas et cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione et velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ,

aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, et sese mutuo penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, et peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi et difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum et cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectui suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes et cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri et sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos et cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuatur, et ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem et alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesis vorticum.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, et planetarum regiones liberrimè pertranseunt; et sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè

SECTIO
TERTIA.

tiffimè confirmantur ex observationibus astronomicis : et per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omninò locus non erit ; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem à vorticibus devehuntur ; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta ; uti suprâ dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem : quæ verò jacet intrâ orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquuplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi : unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, et locorum fiet invicem permutatio ; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur ; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum : et ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa et multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrâ telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertię pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas et vis inertię telluris : inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, et valde admodum sensibilis ; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest ;
atque

atque adeò neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiae. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiae fluidae, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; et sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè tenacia fuerint ad instar olei et mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, et hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; et minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, et communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa qua fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate et vi inertiae. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertiae, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiae: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem infervit, ineptissimam vocare liceat et philosopho prorsûs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt,
hanc

SECTIO
TERTIA.

hanc verò non inertem esse statuunt: hi verbis tollunt vacuum, reponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium presens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante et implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper et ubique extitisse, infinitam esse et æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum et motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis et gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui verè physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi et interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet

vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quod optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis et vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos et reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum et dominium summum sapientissimi et potentissimi Entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos et æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis et observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, et ad ea porrò pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, meritò admirantur et suspiciunt quicunque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit et penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonfus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, et dulcissima contemplatione frui, Conditorem verò ac Dominum universorum impensius colere et venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis et sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam et bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

SECTIO
TERTIA.

II. PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

TAB. VI.
FIG. 51.

Est ellipsis umbilicus S . Agatur SP secans ellipseos tum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , et compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC , eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ HI ipsi EC parallelâ, ob æquales CS , CH æquantur ES , EI , adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS , PI , id est (ob parallelas HI , PR , et angulos æquales IPR , HPZ) ipsarum PS , PH , quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant [¹]. Ad SP demittatur perpendicularis QT , et ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC \text{ quad.}}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , id est, ut PE seu AC ad PC ; et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv , et GvP ad $Qv \text{ quad.}$ ut $PC \text{ quad.}$ ad $CD \text{ quad.}$ et (per corol. 2. lem. VII.) $Qv \text{ quad.}$ ad $Qx \text{ quad.}$ punctis Q et P coeuntibus est ratio æqualitatis; et $Qx \text{ quad.}$ seu $Qv \text{ quad.}$ est ad $QT \text{ quad.}$ ut $EP \text{ quad.}$ ad $PF \text{ quad.}$ id est ut $CA \text{ quad.}$ ad $PF \text{ quad.}$ sive † ut $CD \text{ quad.}$ ad $CB \text{ quad.}$ Et conjunctis his omnibus rationibus, [^u] $L \times QR$ fit ad $QT \text{ quad.}$ ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2PC$ ad Gv . Sed punctis Q et P coeuntibus æquantur $2PC$ et Gv . Ergo et his proportionalia $L \times QR$ et $QT \text{ quad.}$ æquantur.

[¹] 74. Est $AI = \frac{1}{2}SJ$, $IP = \frac{IP+PH}{2}$, unde $EI+IP = \frac{SP+PH}{2} = AC$.

[^u] 75. Coniungantur Rationes $L \times QR : L \times Pv :: AC : PC$
 $L \times Pv : Gv \times Pv :: L : Gv$
 $Gv \times Pv : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$
 $Qv^2 : QT^2 :: CD^2 : CB^2$

et fit $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC : Gv \times CB^2 :: 2BC^2 \times PC : Gv \times CB^2$
 $:: 2PC : Gv$.

α Ham. Con. Sect. L. I. P. xxxi. Cor. i. † Ham. L. IV. P. i.

α. sim: Co: l: 2: prop: 13.

‡ 26 sim

æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est, reciproce in ratione duplicata distantiae SP . Q.E.I.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, qua corpus P in ellipfi illa revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. IX.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C ; ducatur CE parallela ellipseos tangenti PR ; et vis, qua corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE et PS concurrant in E , erit ut $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VI. [v]:) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciproce. Q.E.I.

Eadem brevitate, qua traduximus problema quartum ad parabolam, et hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, et usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PRO-

[v] 76. Nam si vires absolutæ in centris C et S tales esse supponantur, ut tempora periodica circa hæc centra æqualia sint, erit (per prop. VI. cor. 3.) vis tendens ad centrum C , vel CP , ad vim tendentem ad focum S , ut $CP \times SP^2$, ad cubum lineæ ductæ à centro C ad tangentem, parallelæ distantiae SP à secundo centro virium S , quæ linea æqualis est PE : unde vis tendens ad focum est ut $\frac{CP \times PE^3}{CP \times SP^2} = \frac{PE^3}{SP^2}$.

77. LEM. Chorda curvaturæ PV quæ per focum ellipseos transit æqualis est $\frac{2DC^2}{PE}$. Nam sit PO diameter curvaturæ, ob similia triangula

TAB. VI.
FIG. 52.

PEF , PVO , erit $PE : PF :: PO$ (vel $\frac{2CD^2}{PF}$): $PV = \frac{2CD^2}{PE}$.

78. PROP. XIII. Aliter. Iisdem positis, demittatur SY perpendicularis à foco S in tangentem, et ob similia triangula SPY , EPF , est $SY : SP :: PF : PE$, ideoque $SY^2 = \frac{SP^2 \times PF^2}{PE^2}$, $SY^2 \times PV = \frac{SP^2 \times PF^2 \times 2CD^2}{PE^3}$;

K 2

unde,

$$1. PO : PV :: PC : PF$$

$$PO = \frac{PC \times PV}{PF}, \text{ Quæ vero per } 56 = \frac{2CD^2}{PC}, \text{ ergo } PO = \frac{2CD^2}{PF}$$

SECTIO
TERTIA.

12. PROPOSITIO XIV. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

TAB. VI.
FIG. 53.

Sunto CA, CB femiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD ; et Qv ordinatim applicata ad diametrum GP . Agatur SP secans cum diametrum DK in E ; tum ordinatim applicatam Qv in x , et compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse femiæ transverso AC , eo quod, acta ab altero hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH æquantur ES, EI ; adeo ut EP femidifferentia sit ipsarum PS, PI ; id est (ob parallelas IH, PR et angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH , quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT . Et hyperbolæ latere recto principali (feu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , feu Px ad Pv , id est (ob similia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC , feu AC ad PC . Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv ; et (ex natura conicorum) rectangulum GvP ad Qv quad. ut PCq ad CDq ; et (per corol. 2. lem. VII.) Qv quad. ad Qx quad. punctis Q et P coeuntibus fit ratio æqualitatis; et Qx quad. feu Qv quad. est ad QTq ut EPq ad PFq , id est, ut CAq ad PFq , five ut CDq ad CBq ; et conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, feu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, five ut $2PC$ ad Gv . Sed punctis P et Q coeuntibus

unde, ob data $2CD^2 \times PF^2$, et PE^3 , est vis centripeta reciprocè ut SP^2 . Q. E. I.

[79] Ex accuratissimis Tychonis Braheæ observationibus invenit Keplerus, planetas non in orbitis circularibus, sed ellipticis deferri, solemque in ellipseos focorum alterutro versari: et ex hac propositione consequitur eos igitur retineri in orbitis suis viribus centripetis, quæ in inversâ duplicata ratione distantiarum à sole variantur.

bus æquantur $2PC$ et Gv . Ergo et his proportionalia $L \times QR$ et QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est, reciproce in ratione duplicata distantiae SP . Q. E. I.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C . Prodibit hæc distantiae CP proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop. VI.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$, hoc est, ob datam PE reciproce ut SPq . Q. E. I.

Eodem modo demonstratur, quod corpus hac vi centripeta in repulsivam versa movebitur in hyperbola opposita.

144.

LEMMA XII.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus et a vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M , et SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN et ob æquales MS et SP [y], MN , et NP , MA et AO parallelæ erunt rectæ AN et OP ; et inde triangulum SAN rectangulum erit ad A , et simile triangulis æqualibus SNM , SNP : ergo PS est ad SN ut SN ad SA . Q. E. D.

Corol.

[y] 80. Sumatur AQ ipsi AS æqualis, et ducatur linea QR perpendicularis et PR parallela ipsi MO ; ob AQ et AS , MA et AO [Ham. L. I. P. XLVII.] æquales, æquantur etiam MS , QO ; ob QO vero æqualem PR vel SP , tandem æquales erunt MS , SP .

TAB. VI.
FIG. 54.

α per: 10: 1. Sim: Con:

TAB. VI.
FIG. 54.

SECTIO
TERTIA.

Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA .

Corol. 2. Et ob datam SA est SNq ut PS .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujuscvis PM cum recta SN , quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN , quæ parabolam tangit in vertice principali.

13. PROPOSITIO XV. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

TAB. VI.
FIG. 55.

Maneat constructio lemmatis, fitque P corpus in perimetro parabolæ, et a loco Q , in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR et perpendicularem QT , necnon Qv tangenti parallelam, et occurrentem tum diametro PG in v , tum distantiae SP in x . Jam ob similia triangula Pxv , SPM , et æqualia unius latera SM , SP , æqualia sunt alterius latera Px seu QR et Pv . Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto et segmento diametri Pv †, id est rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; et punctis P et Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx quad. eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT , SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq , hoc est (per corol. 1. lem. XII.) ut PS ad SA , id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, et inde (per prop. IX. lib. V. elem.) QTq et $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: et propterea (per corol. 1. et 5. prop. V.) vis centripeta est reciproce ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciproce in duplicata ratione distantiae SP . Q. E. I. [2].

Corol.

TAB. VI.
FIG. 52.

[2] 81. LEM. In omni sectione conicâ est radius circuli curvaturæ Pr æqualis $\frac{L \times SP^3}{2SY^3}$. Est enim in ellipsi $CD \times PF = CA \times CB$ [Hamilton

† Hamil. Con. Sect. L. II. P. i. *sin*: $l:1$. *p*: 13.

L. IV.

Corol. I. Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P , et vi centripeta, quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; et contra. Nam datis umbilico, et puncto contactus, et positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit.* Datur autem curvatura ex data vi centripeta, et velocitate corporis: et orbes duo se mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate describi non possunt [a].

*Vide Keill. Phi: 7. n° 317.

PRO.

L. IV. P. I.] unde $CD^2 = \frac{CA^2 \times CB^2}{PF^2}$, et $\frac{CD^2}{PF} [\text{vel } Pr] = \frac{CA^2 \times CB^2}{PF^3}$; ob similia autem triangula PFE , SPY , $PF : PE :: SY : SP$, et $PF^3 = \frac{PE^3 \times SY^3}{SP^3}$, quo substituto, $Pr = \frac{CB^2 \times SP^3}{PE \times SY^3}$; pro $\frac{CB^2}{PE}$ ponatur $\frac{L}{2}$ et $Pr = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$. Eodem modo demonstratur lemma in hyperbolâ. Crescente fororum distantia in infinitum, abeat figura elliptica in parabolam, manet $Pr = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$.

$\alpha - 56.$

82. Exinde prop. XIII. XIV. XV: breviter et generatim demonstrari possunt. Nam est vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times Pr} = \frac{2 SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{1}{L \times SP^2}$, but $Pr = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$ & $\frac{1}{L \times SP^2} = \frac{SP}{2 SY^3 \times Pr} = \frac{SP \times 2 SY^3}{2 SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{1}{L \times SP^2}$ $\therefore Pr = \frac{1}{L \times SP^2}$

83. Ex calculo à clarissimo Halleio inito, et quam plurimis observationibus astronomicis comprobato, constat cometas moveri circa solem in orbitis parabolicis, vel ellipticis excentricis ad formam parabolarum quam proxime accedentibus: et ex propositionibus novissimis consequitur, vires quibus retinentur in orbitis suis variari in inversâ duplicata ratione distantiarum a sole.

[a] 84. Ob datas velocitatem in puncto P , positionem tangentis PY , et vis centripetæ quantitatem absolutam, dantur QT et QR , ideoque $\frac{QT^2}{QR}$, ceu latus rectum.* Sumatur PE æqualis dimidio lateris recti; et ex punctis P et E erigantur PK , EK perpendiculares ipsis PY , PS , quæ occurrant in K ; erit punctum K in axe sectionis, (Ham. sect. con. L. ii. P. xxvii.) et proinde linea SK positio axis: ducatur jam PF , ita ut angulus FPY sit æqualis

TAB. VI. FIG. 56. $\frac{QT^2}{QR} = \frac{1}{L \times SP^2}$

& $Pr = \frac{2R}{2T^2 \times SP^2} \therefore$

$\frac{2R}{2T^2 \times SP^2} = \frac{1}{L \times SP^2}$ & $L = \frac{2T^2}{2R}$

SECTIO
TERTIA.

14. PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiae locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

TAB. VII.
FIG. 57.

α cor: 4. pro: 1.

Nam (per prop. XIII. XIV. XV.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{2Tq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P et Q . Sed linea minima QR dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est

lis angulo SPY ; linea SK utrinque producta vel occurret lineæ PF in loco quodam F , vel huic lineæ parallela erit, vel ei occurret ad alteram partem puncti S : in primo casu orbita ellipsis est, cujus foci sunt S et F ; in secundo, parabola; in tertio hyperbola: hæc vero orbitæ, focis, axis positione, et latere recto principali datis, describi possunt. Patet corpus quodvis in orbitis hoc modo constructis moveri posse, si vis centripeta sit reciproce ut quadratum distantiae: et patet corpus hoc nullam aliam orbitam describere posse, ex eadem ratiocinandi methodo, quâ usi sumus in nota (61.) ad hunc casum applicatâ.

TAB. VI.
FIG. 51.

85. PROB. Exeat corpus aliquod de loco dato P datâ cum velocitate secundum datam positionem rectam PY , et simul urgeatur à vi centripetâ tendente ad centrum datum S , quæ in loco quidem P innotescat, aliis vero in locis sit reciproce ut quadrata distantiarum ab hoc centro. Quæritur sectio conica quam motu suo descripturum est hoc corpus. Cum tangat recta ZPY figuram quæsitam in loco P , et cum detur positione recta SP per umbilicorum alterum S transiens, dabitur positione recta PH , quæ per alterum figuræ umbilicum H transibit, et cujus inventa longitudo solvet problema.

* 34.

Sit igitur a ad b ut data velocitas in orbita, ad velocitatem quâ circulus describitur in eadem distantia, quæ etiam dabitur ex datis vi et distantia: atque his quidem datis dabitur et formâ et positione trajectory quæsitæ: erit enim $2bb - aa : aa :: SP : PH$, inter quas semiaxis transversus medius est arithmeticus; et si in tangentem ZPY demittantur perpendiculares SY , HZ , erit etiam $2bb - aa : aa :: SY : HZ$, inter quas semiaxis conjugatus medius est geometricus. DEM. Esto enim umbilicus alter H , quæcunque tandem fuerit longitudo PH ; et cum sectiones omnes conicæ ad ellipsin referri possunt, ponamus sectionem quæsitam ellipticam esse; et quadratum semiaxis conjugati æquale erit et rectangulo $SP + PH \times \frac{L}{4}$, et rectangulo SY

$$SP + PH : 2bc :: 2bc : L :: bc^2 = \frac{SP + PH \times L}{4} \times HZ$$

est (per hypothesin) reciproce ut SPq . Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicata ratione areae $QT \times SP$. Q. E. D.

Corol. Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti, et ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

15 PROPOSITIO XVII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem et latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione

$\times HZ$ (Ham. L. ii. P. xxi.) ergo $\overline{SP + PH} \times \frac{L}{4} = SY \times HZ$: sed ob similia triangula SPY , HPZ , erit $HZ = SY \times \frac{PH}{SP}$, et $SY \times HZ = SY^2 \times \frac{PH}{SP}$; quare est $\overline{SP + PH} \times \frac{L}{4} = SY^2 \times \frac{PH}{SP}$; quare $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH} = \frac{4 SY^2}{L}$. Sed velocitas in omni orbita ad altitudinem quamvis SP est in sub-

duplicata ratione $\frac{QT^2 \times SP^2}{SY^2}$ (18), et in conica sectione $L = \frac{QT^2}{QR}$; et præ-

terea QR dato tempore est ut $\frac{1}{SP^2}$, unde fit L proportionale $QT^2 \times SP^2$, quo substituto est velocitas in conica sectione reciproce in subduplicata ratione longitudinis $\frac{SY^2}{L}$, vel $\frac{4 SY^2}{L}$: ergo eadem velocitas est etiam reciprocè in sub-

duplicata ratione longitudinis $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH}$. Ergo velocitas corporis in circulo revolventis ad altitudinem primam SP est ad velocitatem corporis e loco suo primo P exeuntis, in subduplicata ratione $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH}$ ad L SP

* ex hyp: & cor: 4. pro: 1.

SECTIO
TERTIA.

tione composita ex subduplicata ratione lateris recti et sesquipli-
cata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop.
XVI.) est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti
et ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata
ratio lateris recti, et manebit sesquuplicata ratio majoris axis ea-
dem cum ratione periodici temporis. Q. E. D. (^b).

Corol.

* Sit $F = \text{vis cent.}$ $v = \text{vel. corp.}$
in circulo revolvendi, atq;
 $SP = \text{radius circuli};$
tum $V = \sqrt{F \times SP}$ (per
cor. 1. prop. 4.) red ex hyp:
 $F = \frac{1}{SP^2}$, ergo $V = \sqrt{\frac{SP}{SP^2}} = \frac{1}{\sqrt{SP}}$,
vel $= \sqrt{SP + SP \times \frac{SP}{SP^2}}$
 $\frac{1}{\sqrt{2SP}}$; inde
 $V:V \text{ in Ellip.}:: \&c.$

$SP + SP \times \frac{SP}{SP}$, vel in subduplicatâ ratione $SP + PH$ ad $2PH$. Est
ergo b^2 ad a^2 ut $SP + PH$ ad $2PH$; $2b^2$ ad a^2 ut $2SP + 2PH$ ad
 $2PH$; vel ut $SP + PH$ ad PH , et dividendo $2b^2 - a^2$ ad a^2 ut SP ad
 PH vel ut SY ad HZ . Q. E. D.

86. Cor. 1. Orbita descripta ellipsis erit, vel parabola, vel hyperbola, prout
quantitas a^2 minor fuerit, vel æqualis, vel major quam $2b^2$.

87. Cor. 2. Si parabola sit, erit hujus latus rectum $\frac{4SY^2}{SP}$ per Lem. XII.
et etiam ex solutione hujus problematis; et axis per S transiens erit recta ipsi
 PH parallela.

88. Cor. 3. Si ellipsis sit vel hyperbola, erit ellipseos semiaxis $SP \times \frac{b^2}{2b^2 - a^2}$,
et semiaxis hyperbolæ $SP \times \frac{b^2}{a^2 - 2b^2}$. Porro semiaxis conjugatus in casu
priori erit $SY \times \sqrt{\frac{a^2}{2b^2 - a^2}}$, in posteriore $SY \times \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - 2b^2}}$.

89. Cor. 4. Itaque si detur velocitas, et vis centripeta ad altitudinem quam-
vis SP , idem erit axis transversus quicunque fuerit angulus SPY ad eandem
altitudinem; et axis conjugatus erit ut sinus anguli istius SPY .

^b 90. Contra, posito quod tempora periodica in ellipsis diversis circa centrum
idem descriptis varientur in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum,
erunt vires in mediis illis distantis ut distantiarum quadrata inversè. Sit enim
 A semiaxis major, M semiaxis minor, et P tempus periodicum, erit ex hypo-
thesi P ut $A^{\frac{3}{2}}$; quoniam vero tempora periodica sunt in ratione arearum tota-
rum directè, et arearum datis temporibus descriptarum inversè, erit in ellipsi
 P vel $A^{\frac{3}{2}}$ ut $\frac{A \times M}{QT \times SP}$, unde est $QT \times SP$ ut $\frac{M}{A^{\frac{1}{2}}}$, vel $QT^2 \times SP^2$ ut $\frac{M^2}{A}$,
quæ est ut L , vel ut $\frac{QT^2}{QR}$; unde est QR , vel ei proportionalis vis centripeta,
inversè ut distantiae mediocris quadratum.

91. Hinc sequitur, concessâ rationum harmoniâ quam invenit Keplerus in-
ter temporum periodicorum quadrata et mediarum distantiarum cubos, quod
vires

Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon. c.

16 PROPOSITIO XVIII. THEOREMA X.

Iisdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendicularorum inverse, et subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendicularum SY , et velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{SY^2}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ

TAB. VII.
FIG. 57.

in data temporis particula descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens PR , id est, ob proportionales PR ad QT et SP ad SY , ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciproce et $SP \times QT$ directe; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XVI.) in subduplicata ratione lateris recti. Q. E. D. ‡

Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendicularorum, et duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis et minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum

vires acceleratrices, quibus planetæ omnes primarii in solem urgentur, sunt inter se inversè ut mediarum illarum distantiarum quadrata.

92. Hinc etiam, si ex observationibus astronomicis diametri orbitarum quas cometæ describunt, accurate determinari possint, tempora reditus definire liceret; et vice versâ, temporibus revolutionum concessis, axes illorum majores, maximæque a sole vel tellure excurrentium distantia, calculo simplicissimo inveniri possunt.

‡ Patet etiam e demonstratione problematis (85).

SECTIO
TERTIA

distantiarum inverse, et subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiae.

Corol. 3. Ideoque velocitas in conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam. *viz ut* $\sqrt{L} : \sqrt{2D}$.

Corol. 4. Corporum in ellipsis gyantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem, quæ corporum gyantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per corol. 6. prop. IV.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores, et hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias et latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, et fiet ratio subduplicata distantiarum inverse (^c).

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem (^d).

Corol. 6. In parabola velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiae corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XII.) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicata ratione distantiae. In hyperbola perpendicularum minus variatur, in ellipsi magis.†

Corol. 7.

(^c) 93. Patet (per 85). velocitatem in sectione conicâ esse semper ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam, in subduplicatâ ratione distantiae PH ab altero foco, ad semiaxem majorem, est enim $a^2 : b^2 :: 2PH : SP + PH :: PH : \frac{SP + PH}{2}$: in mediâ vero distantia est PH æqualis semiaksi majori.

94. Hinc sequitur, si vires quibus planetæ in solem urgentur sint inverse ut distantiarum quadrata, quod eorundem velocitates forent in ratione distantiarum mediocrium subduplicatâ inverse; quod ab astronomorum observationibus comprobatum invenimus.

(^d) 95. Ob motum in ellipticâ orbitâ confectum patet tellurem velocius ferri tempore brumali, quàm tempore æstivo : tempore enim brumali tellus in perihelio versatur.

† Ham. Con. Sec. L. II. P. xxxi. Cor. II.

Sit A & B = axis major & minor, D = dist. ab umbi. ad verticem axis minoris. $v = \frac{\sqrt{L}}{B} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{D}}$ per cor. 4. p. 1. Sim.

TAB. VI.
FIG. 51.

Corol. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro distantiam in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipsi minor est, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, et per corollaria sexta hujus et propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantibus (°). Hinc etiam in parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbola major (f).

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quavis conica est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Cor. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem et semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum (g).

(°) 96. Nam in parabolâ *PH* æqualis est axi majori: in ellipsi semper minor est: in hyperbolâ major. Unde in parabolâ est *PH* ad semiaxem majorem ut 2 ad 1; in ellipsi minor, in hyperbolâ major quàm in hac ratione: et velocitas est ad velocitatem in circulo in ratione hujus subduplicatâ.

(f) 97. Velocitas in parabolâ est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam ut $\sqrt{2}$ ad 1, velocitas in hoc circulo est ad velocitatem in circulo ad dimidiam distantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$, componendo igitur has rationes, velocitas in parabolâ æqualis erit velocitati in circulo ad dimidiam distantiam: in ellipsi autem minor est, et in hyperbolâ major, ex eo quod ratio velocitatis in ellipsi ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam minor est quàm $\sqrt{2}$ ad 1, in hyperbolâ major.

(g) 98. Consequitur etiam ex ipsâ propositione: est enim velocitas in conicâ sectione ad velocitatem in circulo ut $\frac{\sqrt{L}}{SR}$ ad $\frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, vel ut $\sqrt{\frac{L \times SP}{2}}$ ad

g. Sit *C* = vel: sec: con:
 $V = \text{vel: circulo } \frac{L}{2} \text{ de}$
 $v = \text{vel: circulo eadem de}$
 $\text{ac corp: in sec: con, qd}$
 $\text{sit } D, \& P = \text{perpend:}$
 $C : V :: \frac{L}{2} : P, \text{ sed}$
 $V : v :: \sqrt{D} : \sqrt{\frac{L}{2}}$
 $\text{ergo, } C : v :: \frac{L}{2} : \sqrt{\frac{L}{2}}$
 $\times \sqrt{D} : P, \text{ hoc est ut}$
 $\sqrt{\frac{L}{2}} \times D : P, \text{ hoc est}$
 $\text{ut media propor: de}$
 $\text{nam sit } m = \text{media}$
 $\text{prop: tum } D, m :: m:$
 $\text{atq, } m = \sqrt{\frac{L}{2} \times D}.$

SECTIO
TERTIA.

ad SY , hoc est ut media proportionalis inter $\frac{L}{2}$ et SP , ad perpendicularum SY .

99. Omnia hæc corollaria sequuntur etiam ex eo, quod velocitas in omni orbitâ est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in subduplicata ratione chordæ curvaturæ per centrum virium transeuntis ad duplam distantiam.

100. In ellipsi velocitas V in puncto quovis P est ad velocitatem v in mediâ distantia B , in subduplicatâ ratione PH distantia ab altero foco, ad PS distantiam a centro virium. Est enim $V^2 : v^2 :: CB^2 : SY^2 :: SY \times HZ : SY^2$ (Ex Con. Ham. L. ii. P. xxi.) $:: HZ : SY :: HP : SP$.

TAB. VII.
FIG. 57.

101. Velocitates angulares corporum, in orbitis quibuscvis circa centrum commune revolvendum, sunt inter se ut areæ datis temporibus descriptæ directè, et ut quadrata distantiarum inversè. Nam si linea perpendicularis QT adeo parva esse supponatur, ut pro arcu circuli haberi possit, erit angulus QSP ut $\frac{QT}{PS}$; est autem QT directè ut area trianguli SPQ , et inversè ut altitudo SP , unde angulus QSP est ut area illa directè et ut SP^2 inversè.

102. In conicis sectionibus angulares velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè, et in duplicata ratione distantiarum inversè: sunt enim latera recta principalia in duplicatâ ratione arearum datis temporibus descriptarum. *

103. Ex his consequuntur omnia illa quæ in septimâ sectione Newtonus demonstravit de corporum ascensu et descensu rectilineo, posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantia a centro virium: Nam eadem omnia, quæ jam demonstrata sunt de velocitatibus et temporibus periodicis in conicis sectionibus, obtinebunt, sive latitudo orbitæ descriptæ major sit, sive minor, sive nulla: et diminuendo latus rectum principale in infinitum, manente axe majori, perimeter sectionis cum axe, et foci cum axis verticibus ultimo coincidunt. Recta vero in quâ movetur corpus usurpanda est pro ellipsi evanescentis latitudinis, si velocitas in rectâ illâ sit ad velocitatem quâ circulus describitur ad eandem distantiam in ratione minori quam $\sqrt{2}$ ad 1; pro hyperbolâ autem, si in ratione majori; et pro parabolâ, si in eâ ipsa ratione.

TAB. VI.
FIG. 51.

104. His positis, velocitas corporis de loco quovis b versus centrum S recta descendens, ad altitudinem quamvis SP erit ad velocitatem corporis intervallo SP circulum describentis in subduplicatâ ratione bP ad $\frac{1}{2} Sb$. Nam velocitas in conicâ sectione est semper ad velocitatem in circulo in subduplicatâ ratione distantia ab altero foco, ad semiaxem majorem.

105. Sit $bP = \frac{Sb}{2}$, et erit velocitas acquisita cadendo per bP æqualis ve-

locitati in circulo. Unde si corpus illud ad distantiam æqualem $\frac{Sb}{2}$ in circulo revolvens, sursum projiciatur eâ cum velocitate quâ circulum describit, ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

106. Hinc

* Pro: 16.

106. Hinc sequitur, quòd si corpus in ellipsi revolvens, sursum projiciatur eà cum velocitate quâ ellipsin describit, ascendet ad distantiam a centro virium æqualem axi majori. Nam in mediâ distantia, in quâ velocitas æqualis est velocitati in circulo, ascendet ad duplam a centro distantiam; et per Prop. xii. ad eandem semper altitudinem ascendet, si a quovis alio puncto orbitæ projiciatur. Idem sequitur e Corollario 4to. Prob. (85.) nam si directio projectionis utcunque mutetur manente velocitate et vi centripetâ ad datam distantiam, idem erit axis transversus figuræ, et axis conjugatus erit ut sinus anguli SPX : evanescente hoc sinu, projiciatur corpus recta a centro, et ascendet corpus in perimetro sectionis conicæ evanescentis cujus axis transversus idem manet ac prius; hoc est recta per quam ascendit corpus æqualis est axi transverso sectionis.

107. Si velocitas projectionis ea sit quâ parabola describitur, ascendet corpus in infinitum, neque unquam redibit.

108. Si velocitas projectionis ea sit, quæ sufficeret ad describendam hyperbolam, corpus non modo ascendet ad altitudinem infinitam, sed et motus sui partem aliquam etiam tum retinebit: et velocitas ultima ad altitudinem infinitam erit ad velocitatem in loco quovis P ad finitam altitudinem, ut perpendicularum SY , demissum a centro S in tangentem PY , ad perpendicularum demissum a centro S in asymptotum.

109. Corporis de loco dato b e quiete cadentis tempus totius descensus ad centrum S dimidium est temporis periodici corporis in circulo revolventis ad distantiam æqualem $\frac{1}{2} Sb$. Corpus enim, rectâ descendens de loco b ad centrum S , describit semiperimetrum ellipseos latitudinis evanescentis, et tempus descensus dimidium erit temporis periodici in ellipsi, cujus axis transversus est Sb .

TAB. VI.
FIG. 53.

} ex cor: Prop: 17.

110. Hinc si orbitas planetarum circulares esse supponamus, ex datis temporibus periodicis inveniri possunt tempora, quibus ad centrum motus sui descenderent, si motu omni revolutionis sublato, solâ vi centripetâ urgerentur. Nam tempus periodicum corporis circulum describentis ad distantiam Sb est ad tempus periodicum corporis circulum describentis ad distantiam $\frac{1}{2} Sb$ in sesquiplatâ ratione numeri binarii ad unitatem, vel ut $2^{\frac{3}{2}}$ ad 1, vel ut $2 \times \sqrt{2}$ ad 1; unde est tempus primum, ad dimidium temporis periodici in circulo ad distantiam $\frac{1}{2} Sb$, vel ad tempus rectilinei descensus usque ad centrum, ut $4 \times \sqrt{2}$ ad 1. Exempli gratia cum tempus periodicum terræ sit dierum 365, 2565, et sit $4 \times \sqrt{2} : 1 :: 365, 2565 : 64, 5699$, tellus nostra spatio dierum 64, 5699 recta ad solem caderet. Et ex simili ratiocinio patet quod

	die :	hor :
Mercurius	15 :	13
Venus	39 :	17
Mars	121 :	11
Jupiter	767 :	3
Saturnus	1900 :	4

} in solem caderet spatio circiter

Planetarum

SECTIO
TERTIA.

Planetarum circumjovialium.

		die : hor :
Intimus	} in Jovem caderet spatium circiter {	0 : 7
Secundus		0 : 15
Tertius		1 : 6
Quartus		2 : 23

Planetarum circumfaturriorum.

Intimus	} in Saturnum caderet spatium circiter {	0 : 8
Secundus		0 : 12
Tertius		0 : 19
Quartus		2 : 20
Quintus		14 : 21

Luna in terram caderet spatium circiter 4 : 20

Scholium.

Ope horum corollariorum explicare licet alternum ascensum et descensum planetæ in orbitâ suâ. Abundè quidem a præcedentibus constat, corpus jussuâ velocitate projectum, simulque vi centripetâ in inversâ duplicatâ ratione distantie variante agitur, describere posse orbitam ellipticam focum in centro illo habentem. Quoniam vero huic motui nihil simile in corporibus terrestribus observare licet, ob vim projectilem prorsus contemnendam respectu ad vim gravitatis in lineis parallelis agentem, quæ citissime detrahit corpora omnia in vicinio telluris projecta, permulti profitentur se non concipere posse, quâ ratione corpus, cum semel ad virium centrum descendere cœpit, ~~ab~~ eodem iterum ascendere potest. Etenim aiunt, si descensus a vi præpollenti gravitatis oriatur, quod magis rationi et experientie quotidianæ foret consentaneum, ut propter auctam perpetuo vim gravitatis, distantiam diminuatâ, corpus ad minores perpetuò distantias descenderet, donec tandem ad centrum ipsum appellat. Hinc sane mirantur planetas, cum semel a sole recedere cœpissent, iterum quasi mutato consilio ad solem reverti : cometasque in rapido suo ad solem descensu, quando ipsam solis superficiem tetigisse videntur, quasi metu percitos in infinitum abire.

Huic vero objectioni facilis est responsio. Concedimus nimirum hæc omnia accidere debere si corpora hæc in rectis lineis moveantur : contendimus autem corpora omnia in gyros acta vi centrifugâ gaudere ; et hanc vim centrifugam tam celeriter sæpissimè augeri, ut corpora jamjam ad centra ipsa descensura, quasi repellere potis sit. Hæc vero paulo accuratius considerata sunt. Fingamus corpus motu uniformi in lineâ *AP*, quæ perpendicularis ducitur lineæ *AS*, moveri ; describatur circulus radio *SA*, patet hoc corpus cum ad *P* perventum est a centro recessisse spatium *RP*. Sit linea *AP* quam minima in tempusculo quodam descripta, et vis quâ corpus recedere conatur in puncto *A* repre-

TAB. VII.
FIG. 58.

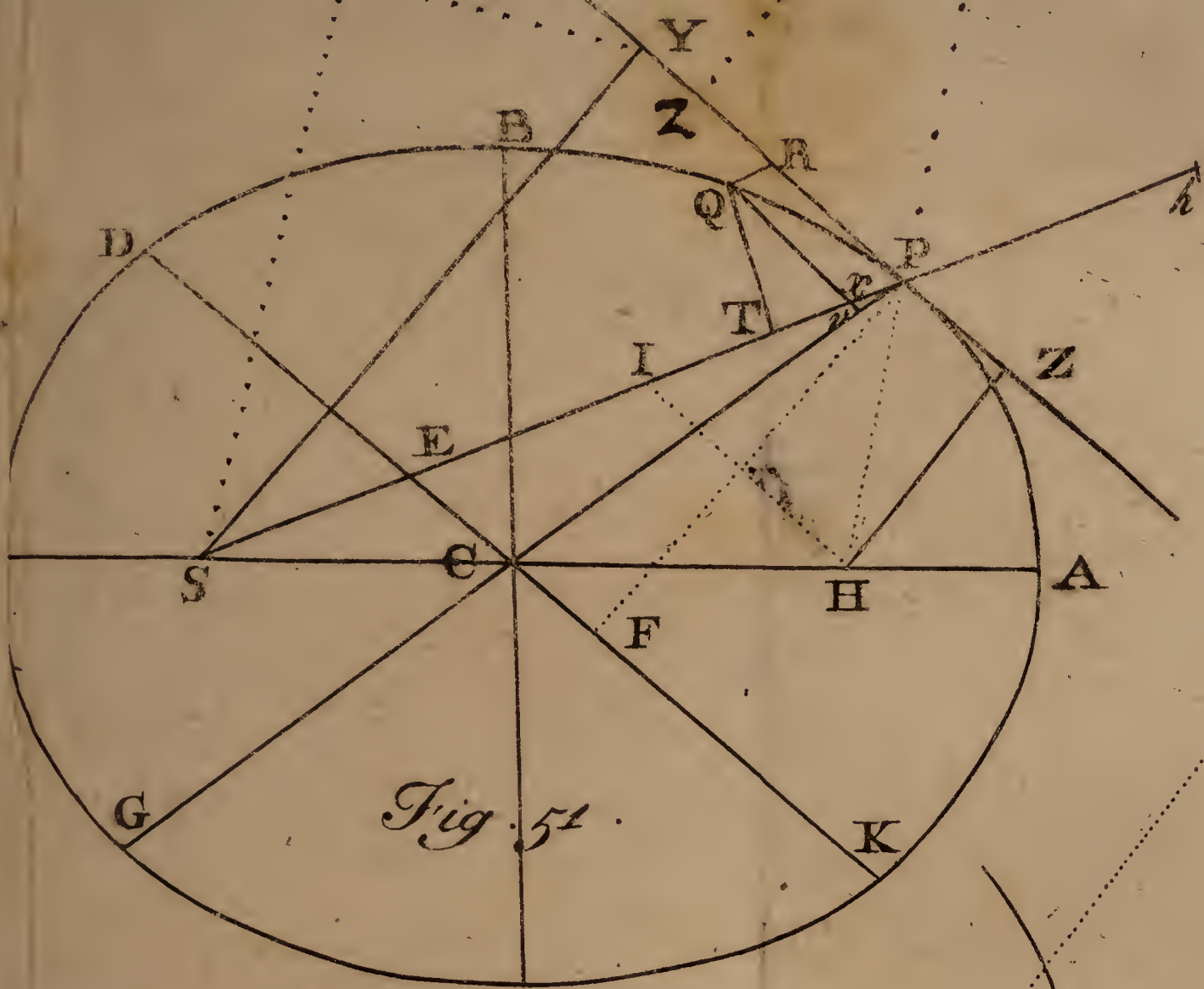


Fig. 51.

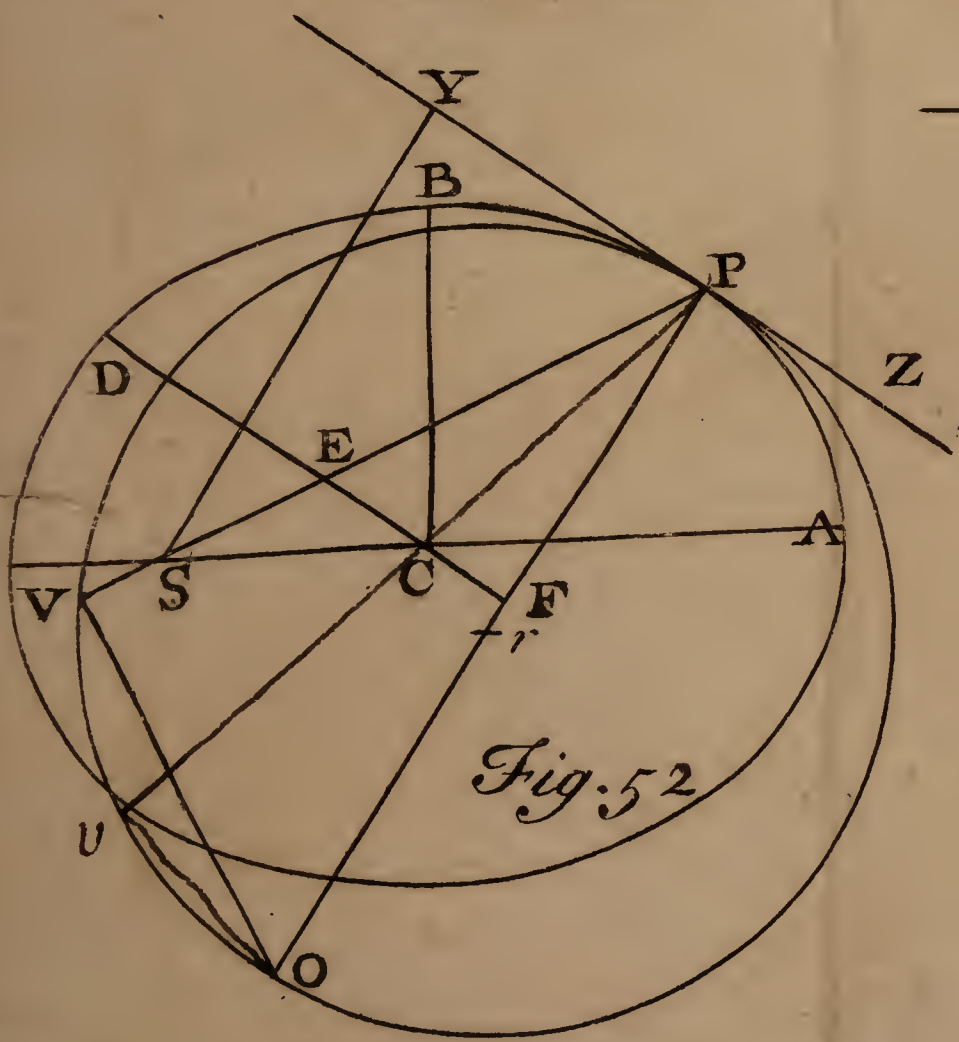


Fig. 52.

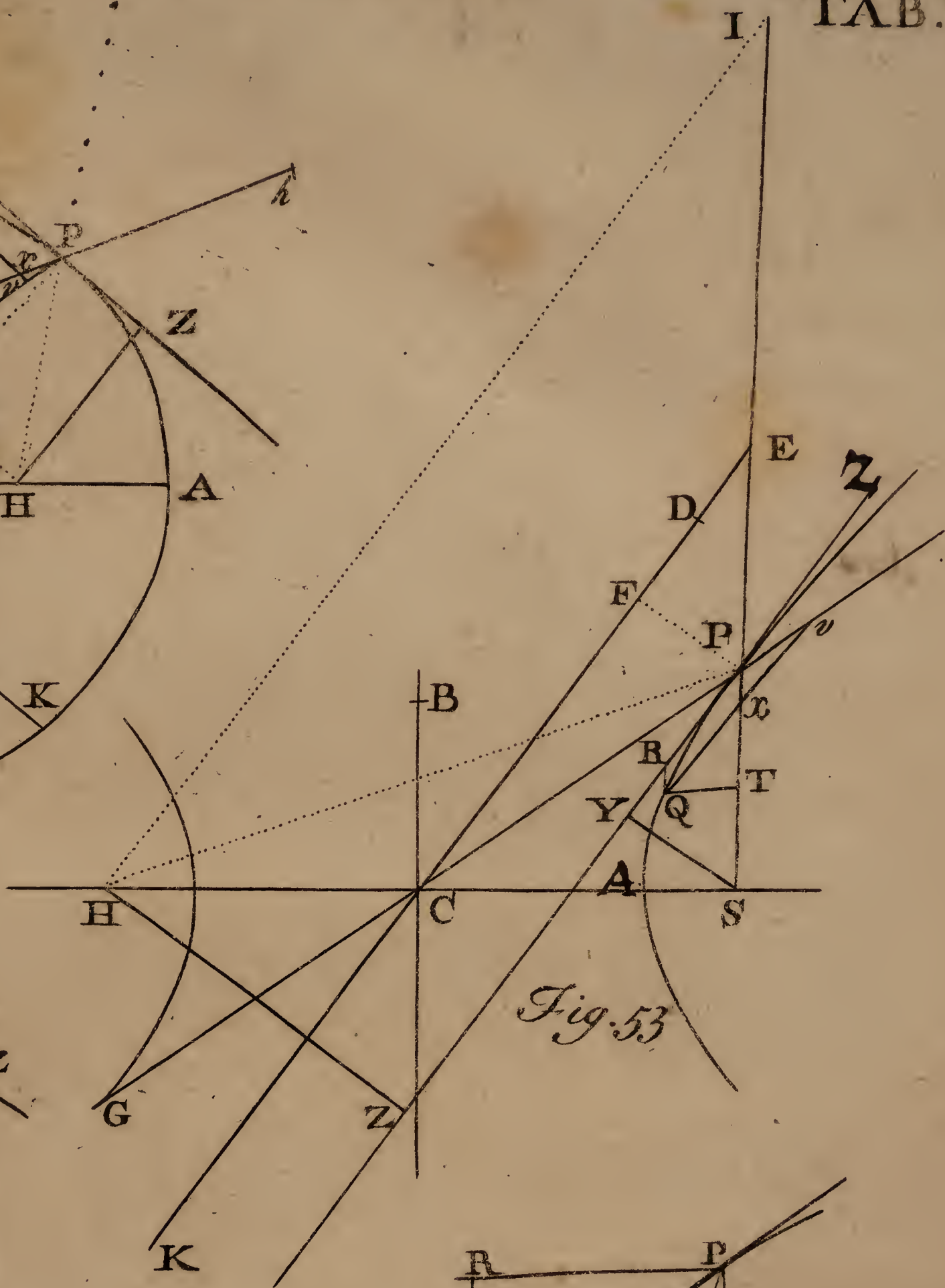


Fig. 53.

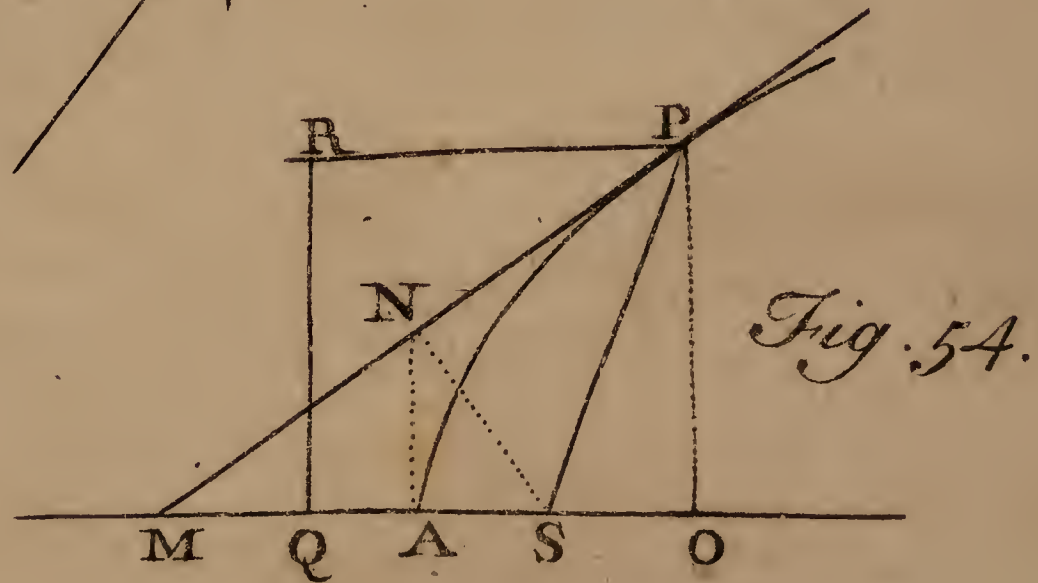


Fig. 54.

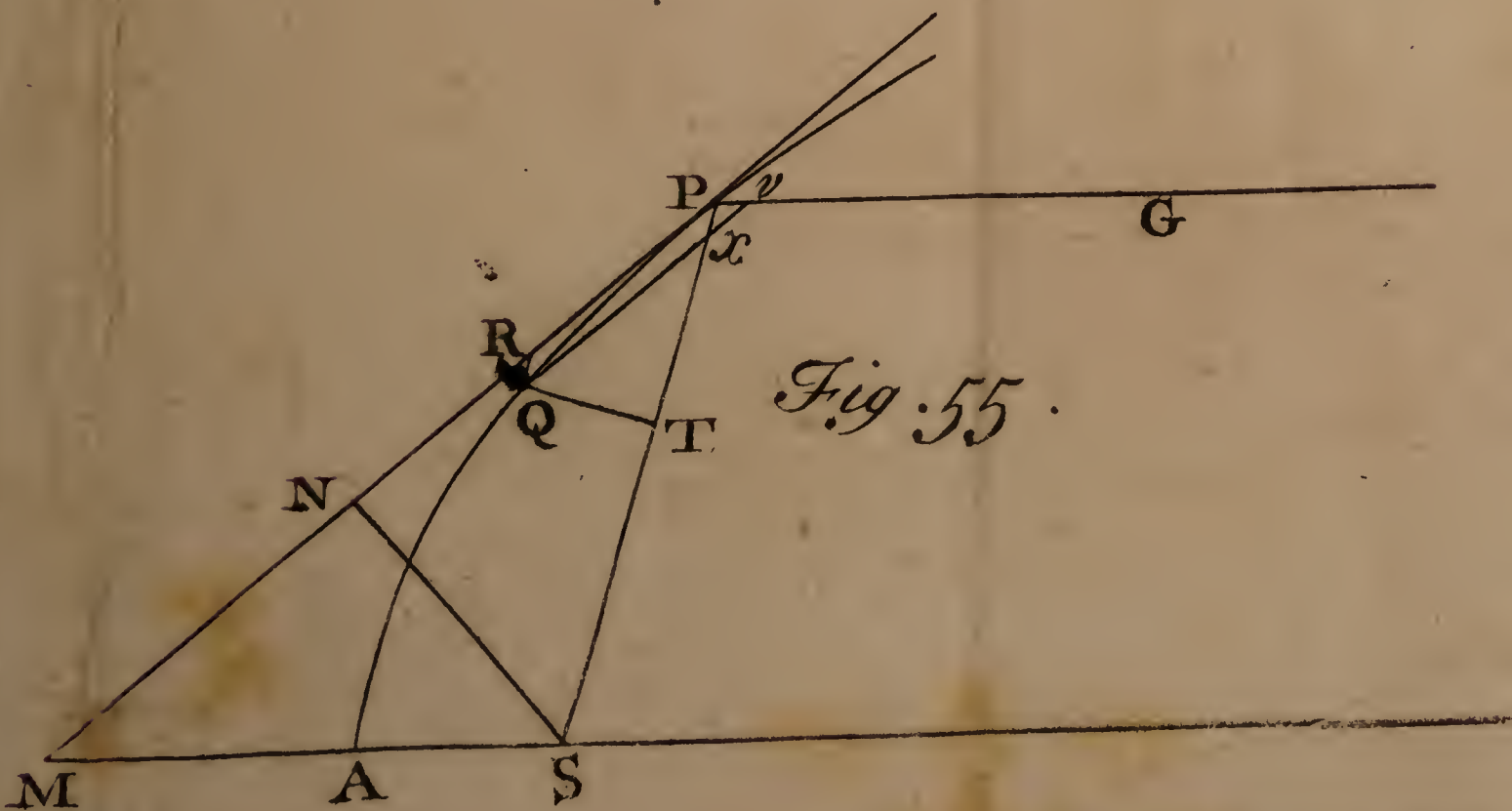


Fig. 55.

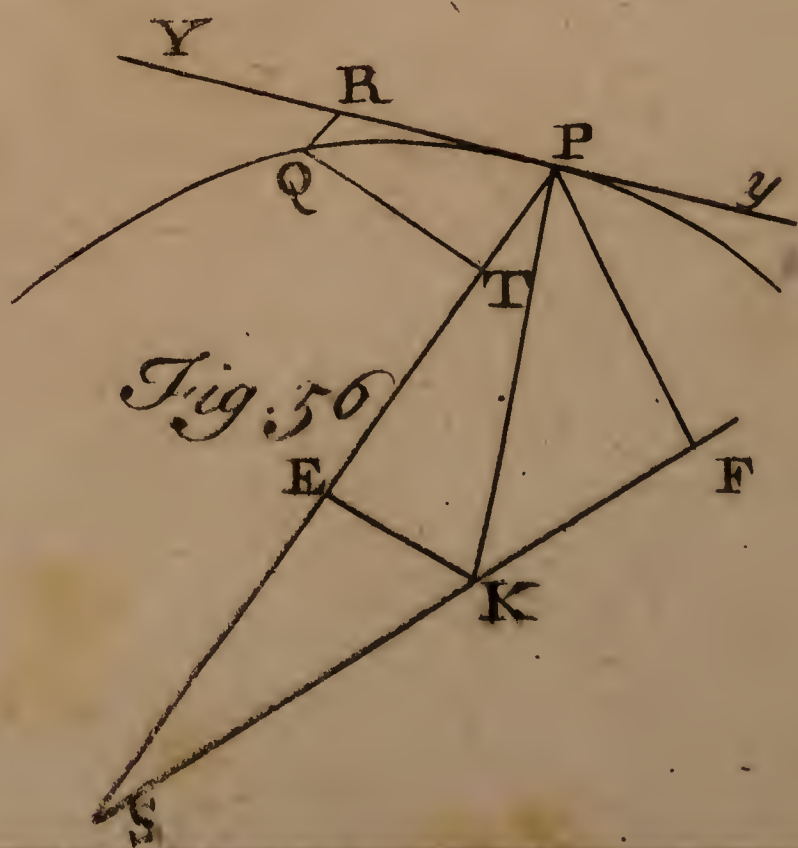


Fig. 56.

1871

representabitur per lineam RP : æqualis huic vi ponatur vis centripeta; et corpus hisce viribus in peripheriâ circuli semper retinebitur. Patet ob vim centrifugam vi centripetæ æqualem, corpus semper eandem a centro distantiam fervare, vel, quod idem est, circulum describere.

Vires autem centripetas atque centrifugas, in circulis semper æquales, in eadem ratione ad diversas distantias variari necesse est ut circuli revera describantur; hoc est (per Corol. i. Prop. IV.) in ratione duplicatâ velocitatis directè, et in simplici ratione radiorum inversè; et proinde, datis vi centripetâ et distantia, inveniri potest certa illa et invariabilis velocitas quæ necessaria est ad corpus in circulo retinendum (34).

Si velocitas igitur corporis projecti, distantia eadem manente, minor sit hac velocitate circulari, conspicuum est, corpus arcum arcui circulari interiorem describere debere, hoc est, ad minorem distantiam descendere. Si, velocitate et vi iisdem manentibus, augeatur distantia, ex eo quod hæc velocitas minor est velocitate quæ requiritur ad corpus in circulo retinendum, corpus iterum arcum quendam arcui circulari interiorem describeret. Eadem methodo sequitur, si augeretur velocitas, vel minueretur distantia, vi centripetâ eadem manente, corpus arcum arcui circulari exteriorem describere; vel quod idem est, a centro recedere. Et proinde ex his concludere licet, si vis centrifuga sit æqualis vi centripetæ, corpus in lineâ perpendiculariter ductâ ad distantiam projectum, in peripheriâ circuli semper retineri; si major sit, a centro recedere; si minor, ad centrum accedere debere.

His præmissis, perpetuam illam oscillationem corporis inter apsidæ orbitæ nullo fere negotio explicare licet, vel posito quod motus perficiatur in orbitâ ellipticâ circa focum secundum hypothesin in Prop. XIII. ex motus illius naturâ, et ex indole figuræ in quâ perficitur motus, luculenter ostendere, hunc motum a vi projectili et vi gravitatis in inversa duplicatâ ratione distantiae variantis oriri posse. Fingamus corpus vi projectili et vi gravitatis agitatum circulum describere ad distantiam maximam ellipsis, posito centro virium in umbilico figuræ, et corpus aliud circa idem virium centrum areas temporibus proportionales in ellipsi illâ ex quâcunque demum causâ describere. Aberratio corporis projecti a tangente eadem fieri potest quæ in eodem tempusculo in orbita elliptica conficitur, si vel augeatur vis gravitatis vel diminuatur vis projectilis. Diminuatur velocitas corporis projecti, donec velocitati corporis alterius in vertice figuræ ellipticæ tandem fiat æqualis; ob legem gravitatis, areasque a corporibus utrisque descriptas æquales, eadem erit utriusque semita, (61) eademque velocitatis variatio. Quoniam vero velocitas in orbitâ ellipticâ crescit in majori quàm inversâ subduplicatâ ratione distantiarum; hoc est, in majori ratione quam variantur velocitates corporum circulos describentium ad easdem distantias: velocitas corporis projecti perpetuo ad velocitatem corporis in circulo appropinquabit; quandoque semel ad distantiam a centro æqualem distantiae mediæ corporis in ellipticâ orbitâ revolventis pervenerit, velocitas ejus velocitati in circulo erit æqualis per Cor. 4. Prop. XVIII. Quæret forsan quispiam utrum corpus hoc vi projectili et vi gravitatis agitatum, postquam ad hanc distantiam pervenerit, in circulo jam ferretur vel in orbitâ ellipticâ moveri

SECTIO
TERTIA.

perseveraret. Responsio facilis est ; perpendiculari enim facillime innotescit, corpus ob angulum projectionis in hoc loco recto minorem propius ad centrum descendere, et ob causas prædictas in ellipsi etiamnum retineri : nec ullus conceditur dubitandi locus, utrum ab hac orbita defleceret, donec ad distantiam minimam perveniat. Postquam vero corpus ad distantiam æqualem distantiae minimae in orbita ellipticâ pervenerit, velocitas ejus major est velocitate quæ requiritur ad corpus in circulo retinendum ; ex eo quod ex naturâ ellipseos, velocitates corporis ex mediâ ad minimam distantiam transeuntis celerius crescunt quam velocitates quæ requiruntur ad corpora in circulis retinenda ad easdem distantias, modo vires centripetæ sint distantiarum quadratis inverse proportionales. Patet igitur corpus projectum lineam circulo exterioriorem describere. Simili argumento concluditur quod velocitatibus et viribus jam decrescentibus iisdem quibus modo crescebant gradibus, corpus in ascensu suo in semiellipsi simili et æquali ei quam in descensu descripserat ferretur et ad distantiam priorem rediret, sicque inter apsidēs suas, si non obstaret medii resistētia, in æternum oscillaretur.

SECTIO IV.

De corporum sphaericorum viribus attractivis.

PROOEMIUM.

SECTIO
QUARTA.

Ex præcedentibus abunde constat gravitationis principium a terræ superficie usque ad lunam extendi, a primario unoquoque ad satellites suos, et a centro solis ad omnes planetas, cum primarios tum secundarios ; et per legem motus tertiam consequitur hosce omnes vicissim in solem gravitare : præterea vis, quâcum urgentur, legem determinatam in diversis distantiis observat, rationem nempe distantiarum a centro duplicatam inversam.

Priusquam vero systema mundanum penitus explicari possit planetarumque singulorum materiæ quantitates ut et densitates viresque gravitationis inveniri ; necesse est ut pauca quædam de universalitate aliisque hujusce principii proprietatibus præmittantur. Progredimur igitur ostensuri in primo loco vim gravitationum vel motum ab eâ generatum in æqualibus a corpore centrali distantiis proportionalem esse quantitati materiæ in corpore attracto. Experimentis accuratissimè factis invenit Newtonus corpora funependula ejusdem figuræ atque magnitudinis, diversæ vero densitatis aut constitutionis internæ, oscillationes suas in temporibus æqualibus peragere, positâ nimirum eadem fili longitudine eademque aëris resistentiâ. Et exinde concludit vires motrices vel gravitantes variari in ratione quantitatis materiæ in corpore attracto*. Natura autem gravitatis in planetas eadem est atque in terram. Elevari igitur fingantur

* THEOREMA. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ*
ex

tur corpora terrestria ad usque orbem lunæ, unàque cum lunâ motu omni privata demitti, et quoniam in temporibus æqualibus spatia æqualia cum lunâ cadendo describerent, quantitates materiæ in iisdem sunt ad quantitatem materiæ in lunâ ut pondera eorum ad ipsius pondus. Similiter satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum a Jovis centro; ideoque gravitates eorum acceleratrices sunt in diversis a Jovis centro distantis reciprocè ut quadrata distantiarum, in distantis vero æqualibus æquales: quare corpora quælibet temporibus æqualibus ab altitudinibus æqualibus cadendo spatia æqualia describerent perinde ut sit gravibus in terram. — Eodem argumento planetæ circumsolares ab æqualibus a sole distantis demissi descensu suo in solem spatia æqualia in temporibus æqualibus describerent. Pondera igitur eorum sunt etiam ut quantitates materiæ in ipsis.

Haftenus probavimus vires, quibus corpora diversa vel planetæ diversi attrahuntur ab eodem corpore centrali esse datis distantis ut quantitates materiæ in corporibus attractis, restat probandum vires planetarum diversorum in æqualia corpora datis distantis exercitas esse in ratione quantitatis materiæ in corpore trahente. Cum autem jam antea demonstratur gravitatem in quemlibet planetam seorsim consideratum esse reciprocè ut quadratum distantiae a planetæ istius centro patet veritas hujusce positionis ex Newtoni Prop. LXIX. et Cor. suis.†

Quoniam vero gravitatio corpora omnia pervadere intelligitur nec variatur ob diversam superficiei texturam estque semper in ratione quantitatis materiæ,
oritur

ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

DEM. Nam velocitas, quam data vis in datâ materia, dato tempore generare potest, est ut vis et tempus directè, et materia inversè. Quo major est vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem secundam manifestum est. Jam vero si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, et arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describunt singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè, et quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires et oscillationum tempora directè, et velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora; atque ideo tempora directè et velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum; et propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices, et quadrata temporum, id est, ut pondera et quadrata temporum. Q. E. D.

Cor. Ideoque si tempora sint æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

† THEOREMA. In systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; et corpus aliud B trahit etiam cætera

SECTIO
QUARTA.

oritur gravitatio totius ex gravitatione partium. Exempli gratiâ, pondus montis oritur ex gravitatione partium montis ad tellurem et ex summâ gravitationum componitur; et similiter gravitatio telluris ad montem ex summâ gravitationum partium telluris ad montem conficitur; extenditur igitur gravitatio pro ratione quantitatis materiæ solidæ ad unamquamque materiæ particulam, legesque quibuscum particulæ componentes se invicem trahunt, datis legibus quibuscum sphæræ ex his particulis conflatae sese attrahunt, jam sunt explorandæ.

P R O-

A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

DEM. Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B, C, D* versus *A*, paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; et similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantis; et ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ sunt ut vires acceleratrices et corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc si singula systematis corpora *A, B, C, D, &c.* seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Cor. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora *A, B, C, D, &c.* seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

70. §:12. PROPOSITIO XIX. THEOREMA XI.

Si ad sphaericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrecentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

SECTIO
QUARTA.

Sit $HIKL$ superficies illa sphaerica, et P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK , IL , arcus quam minimos HI , KL intercipientes; et, ob triangula HPI , LPK (per corol. 3. lem. VII.] similia, arcus illi erunt distantis HP , LP proportionales; et superficiei sphaericæ particulæ quævis ad HI et KL , rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directæ, et quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphaericam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q.E.D.

TAB. VII.
FIG. 59.

71. §:12. PROPOSITIO XX. THEOREMA XII.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaeræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $abkb$ æquales duæ superficies sphaericæ, centris S , s , diametris AB , ab descriptæ, et P , p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ
 PHK ,

TAB. VII.
FIG. 60.

SECTIO
QUARTA.

PHK , PIL , pbk , pil , auferentes a circulis maximis AHB , abb , æquales arcus HK , bk et IL , il : Et ad eas demittantur perpendiculara SD , sd ; SE , se ; IR , ir ; quorum SD , sd secant PL , pl in F et f : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ , iq . Evanescant anguli DPE , dpe : et ob æquales DS et ds , ES et es , lineæ PE , PF et pe , pf et lineola DF , df pro æqualibus habentur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE , dpe simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit PI ad PF ut RI ad DF , et pf ad pi ut df vel DF ad ri ; et ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri , hoc est (per corol. 3. lem. VII.) ut arcus IH ad arcum ib . Rursus PI ad PS ut IQ ad SE , et ps ad pi ut se vel SE ad iq ; et ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq . Et conjunctis rationibus $PI quad. \times pf \times ps$ ad $pi quad. \times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ib \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circulem quam arcus ib convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P et p , sunt (per hypothefin) ut ipsæ superficies directæ, et quadrata distantiarum superficierum a corporibus inverse, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (facta per legum corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS , ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ , et pi ad pq ; id est (ob similia triangula PIQ et PSF , piq et psf) ut PS ad PF et ps ad pf . Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut $ps quad.$ ad $PS quad.$ Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL , kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut $ps quad.$ ad $PS quad.$ inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper sd æqualem SD et se æqualem SE , distingui potest. Et per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. Q. E. D.

P R O-

72. §. 12. PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

SECTIO
QUARTA.

Si ad sphaeræ cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescientes in duplicata ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphaeræ densitas, tum ratio diametri sphaeræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis, qua corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphaeræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a sphaeris duabus attrahi, unum ab una et alterum ab altera, et distantias eorum a sphaerarum centris proportionales esse diametris sphaerarum respective, sphaeras autem resolvi in particulas similes et similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphaeræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphaeræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe et ratione duplicata distantiarum inverse ^(h). Sed particulae sunt ut sphaeræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, et distantiae sunt ut diametri; et ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum, Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphaeras ex materia æqualiter attractiva constantes, revolvantur; sintque distantiae a centris sphaerarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiae erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3.

^(h) III. Corpusculum extra sphaericam superficiem, cujus puncta singula vi tali centripetâ urgentur constitutum, attrahitur ad centrum vi quadrato distantiae ab eodem centro proportionali per prop. ultimam; concipe igitur sphaeras hæc duas ex superficiebus sphaericis et concentricis conflatas et patet veritas positionis.

SECTIO
QUARTA.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium et æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrefcentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; vires, quibus corpuscula, ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum ⁽¹⁾.

(1) 112. Vires quibus corpuscula ad similia et homogenea quævis solida similiter posita attrahuntur, sunt ut distantia corpusculorum a punctis quibusvis similiter positis, vel ut solidorum latera quævis homologa; posito quod ad solidorum puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrefcentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis.

TAB. VII.
FIG. 61.

DEM. Resolvi concipiantur similia solida in similes conos $PKLP$, $PHIP$; vel in similia conorum frustra quorum vertices sunt in corpusculo P ; et sint bases eorum KL , HI superficies sphæricæ quarum centra sunt in P : erunt vires similium et concentricarum quarumvis superficierum KL , MN in corpusculum P exercitæ inter se æquales; sunt enim ut superficies illæ directè, et quadrata distantiarum inversè; vel ut $P.K^2$ ad $P.M^2$ directè, et $P.K^2$ ad $P.M^2$ inversè; quæ rationes componunt rationem æqualitatis. Totæ igitur vires similium solidorum $PKLP$, $PHIP$ erunt ut vis illa data superficierum cuiusvis MN , et ut numerus superficierum, ex quibus solida ultimò constant, vel ut PK ad PH . Patet etiam attractionem frustri cuiusvis $MKLN$ esse ut MK . Et idem obtinet in similibus quibusvis solidis, quæ ex similibus conis, vel similibus conorum frustris, ultimò componi intelliguntur.

113. *Cor.* Sit PH æqualis HK , erit vis quâ corpusculum P versus conum $PHIP$ attrahitur, æqualis vi versus frustrum $HKLI$. Unde patet, quod si vires particularum, ex quibus corpus trahens componitur, decrefcant in recessu corpusculi attracti in duplicatâ ratione distantiarum, attractio non multò fortior erit in contactu, quàm cum attrahens et attractum parvo intervallo separantur ab invicem.

TAB. VII.
FIG. 62.

114. Iisdem positis corpusculum intra solidum genitum ex revolutione annularis spatii a duabus similibus et concentricis ellipsis $HIKL$, $bikl$ terminati, nullam in partem attrahitur.

DEM. Sit enim P corpusculum intra solidum constitutum, et IPL recta per P transiens, et occurrens externæ superficierum in punctis I , L ; internæ vero in i , l : intelligatur linea IL bifariam secari in z , et ob similes similiterque positas figuras il bifariam etiam secetur in z , et proinde est Ii æqualis Ll . Vires autem quibus corpusculum P attrahitur ad opposita solidi frustra $Ii bH$, $Kk lL$, quæ inter easdem rectas lineas IPL , HPK per P transeuntes continentur, erunt (112) ut Ii ad Ll , hoc est in ratione æqualitatis: et simili argumento attractiones omnes per totum solidum a contrariis attractionibus destruuntur.

12 PROPOSITIO XXII. THEOREMA XIV.

SECTIO
QUARTA.

Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantiae suæ ab ipsius centro.

In sphaera $ABCD$, centro S descripta, locetur corpusculum P ; et centro eodem S , intervallo SP , concipe sphaeram internam $PEQF$ describi. Manifestum est, (per prop. XIX.) quod sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia $AEBF$ componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P . Restat sola attractio sphaeræ interioris $PEQF$. Et (per prop. XXI.) hæc est ut distantia PS ^(k). Q.E.D.

TAB. VII.
FIG. 63.*Scholium.*

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimo constat, ubi orbium illorum numerus augetur et crassitudo minuitur

(k) 115. Positis quæ in fig. 62. vis, quâ corpusculum p intra spheroidem in semidiametro CQ constitutum ad totum solidum attrahitur, est ad vim corpusculi Q in eadem semidiametro, ut distantia Cp ad CQ .

DEM. Centro enim C semidiametro Cp describi concipiatur sphaeroidis interior $hipkl$ ipsi $HIQKL$ similis; attractiones exterioris solidi annularis contrariis attractionibus destructæ, nihil agunt in corpusculum p ; vires autem quibus attrahuntur corpuscula p , Q , versus solida $hikl$, $HIKL$, sunt ut lineæ quævis homologæ in his solidis (112), vel ut Cp ad CQ .

116. Si igitur sphaera vel sphaeroidis hujusmodi per centrum perforetur, corpora ex diversis a centro sphaeræ distantis in eodem tempore ad centrum pervenirent; et præterea, corpus per foramen tale libere decidens per centrum transiret, et in ascensu suo viribus iisdem, a quibus descendens accelerabatur, retardatum, oscillationes perageret more penduli in arcu cycloidis moti.

tur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies, et solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

74: 12

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras concentricas, et attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiae corpusculi a centro (per prop. xx.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis a centrīs homogenearum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ. Nam (per prop. xxi.) si distantiae sunt proportionales diametris sphaerarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; et, distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

Corol. 2. In distantis quibuscumque attractiones sunt ut sphaeræ applicatae ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam positum, trahatur vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ ab ipsius centro, constet autem sphaera ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cuiusque in duplicata ratione distantiae a particula ⁽¹⁾.

P R O-

⁽¹⁾ 117. Hinc colligere licet particulas ex quibus conflantur corpora solis, telluris, planetarumque singulorum cum primariorum tum secundariorum, se invicem attrahere vi distantiarum suarum quadratis reciprocè proportionali. In propositionibus novissimis demonstravit Newtonus sphaeras a particulis conflatas se invicem trahentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiae se invicem trahere

75 *§. 12.* PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVI.SECTIO
QUARTA.

Si ad sphaeræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod sphaera quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiae centrorum.

Nam particulæ cujuscvis attractio est reciproce ut quadratum distantiae suæ a centro sphaeræ trahentis, (per prop. XXIII.) et propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphaeræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphaeræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. XXIII.) reciproce proportionalis quadrato distantiae suæ a centro sphaeræ; ideoque huic æqualis attractio sphaeræ est in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones sphaerarum, versus alias sphaeras homogeneas, sunt ut sphaeræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centrīs earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphaera attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, qua
ab

here secundum legem eandem. Si igitur positâ hâc lege attractionis sphaerarum particulæ ipsæ se invicem non traherent secundum hanc legem fingatur quævis alia attractionis lex, et ratiocinia Newtoni usurpando luculenter constabit quod particula extra superficiem sphaericam vel sphaeram constituta non attrahetur in inversâ duplicata ratione distantiae. Quoniam igitur vires quibus attrahuntur particulæ in diversis distantis a sole vel quolibet planetâ sunt inter se inverse ut distantiarum quadrata a corpore attrahente, patet a præcedentibus particulam unamquamque et in sole et in unoquoque planeta vi propria attractionis gaudere ita ut unumquodque corpusculum in systemate mundano alia quæcunque attrahat vi distantiarum quadrato reciproce proportionali.

SECTIO
QUARTA.

ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico, et corpora moventur extra sphaeram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra sphaeram.

76: § 12.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XVII.

Si sphaeræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiae densitatem et vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes; et vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota, qua hujusmodi sphaera una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum.

TAB. VII.
FIG. 64.

Sunto sphaeræ quotcunque cõcentricæ similes AB , CD , EF , &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; et hæ (per prop. xxiv.) trahent sphaeras alias quotcunque cõcentricas similes GH , IK , LM , &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiae SP . Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, qua sphaera tota, ex cõcentricis quibuscunque vel cõcentricarum differentiis composita AB , tra-

hit

hit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam GH ; erit in eadem ratione. Augeatur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut materiae densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decre scat; et, addita materia non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphaerae acquirant formam quamvis optatam; et vis, qua harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eadem illa distantiae quadratae ratione inversa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphaerae complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in aequalibus quibuscunque centrorum distantiiis, ut sphaerae attrahentes.

Corol. 2. Inque distantiiis quibuscunque inaequalibus, ut sphaerae attrahentes applicatae ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera sphaerarum in sphaeras erunt, in aequalibus centrorum distantiiis, ut sphaerae attrahentes et attractae conjunctim, id est, ut contenta sub sphaeris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque distantiiis inaequalibus, ut contenta illa directe et quadrata distantiarum inter centra inverse.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a sphaerae utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphaeram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionem servata.

Corol. 6. Si hujusmodi sphaerae aliquae circa alias quiescentes revolvantur, singulae circa singulas; sintque distantiae inter centra revolventium et quiescentium proportionales quiescentium diametris; aequalia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt aequalia; distantiae erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quae superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphaera attrahens, formae et conditionis cujusvis jam descriptae, locatur in umbilico.

Corol. 9.

SECTIO
QUARTA.

Corol. 9. Ut et ubi gyrantia sunt etiam sphaeræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ (^m).

P R O-

(^m) 118. Ope propositionum præcedentium inveniri et inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Pondera enim corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per Cor. 2. prop. IV.) ut diametri circulorum directè et quadrata temporum periodicorum inversè; pondera autem ad superficies planetarum aliasve quasvis a centro distantias majora sunt vel minora (per hanc prop.) in duplicatâ ratione distantiarum inversè. Computum sic ineundo invenit Newtonus pondera æqualium corporum in solis, jovis, saturni, ac terræ superficiebus esse ut 10000, 943, 529 et 435 respectivè.

119. *Cor. 2.* Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis; Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantis ab eorum centrīs; id est in sole, jove, saturno, ac terra ut $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021},$ et $\frac{1}{169282},$ respectivè.

120. *Cor. 3.* Innotescunt etiam densitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium et homogeneorum in sphaeras homogeneas sunt in superficiebus sphaerarum ut sphaerarum diametri per prop. XXI, ideoque sphaerarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa ad sphaerarum diametros applicata. Densitates solis, jovis, saturni, ac terræ, sunt ut 100, $94\frac{1}{2},$ 67 et 400. Est igitur sol paulo densior quàm jupiter, et jupiter quam saturnus, et terra quadruplò densior quam sol.

121. *Cor. 4.* Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed et densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt soli propriores; ut jupiter saturno, et terra jove. In diversis utique distantis a sole collocandi erant planetæ, ut quilibet pro gradu densitatis calore solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra si terra locaretur in orbe saturni rigesceret, si in orbe mercurii in vapores statim abieret. Est enim lux solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior in orbe mercurii quam apud nos, et septuplo solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia mercurii ad calorem accomodetur, et propterea densior sit hâc nostrâ, cum materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

122. *Cor. 5.* Gravitas pergendo a superficiebus planetarum deorsum decrescit in ratione distantiarum a centro quam proxime. Si enim materia uniformis esset obtineret hæc proportio accuratè per prop. XXII. Error igitur tantus est quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

7: S. 12. PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XVIII.

SECTIO
QUARTA.

Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetae proportionales distantiiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua sphaerae duae se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphaerarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ sphaera; S centrum ejus; P corpusculum attractum, $PASB$ axis sphaerae per centrum corpusculi transiens; EF , ef plana duo, quibus sphaera secatur, huic axi perpendicularia, et hinc inde aequaliter distantia a centro sphaerae; G , g intersectiones planorum et axis; et H punctum quodvis in plano EF . Puncti H vis centripeta in corpusculum P , secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH ; et (per legum corol. 2.) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF et distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , qua corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg , sive ut huic aequale planum EF ductum in distantiam illam Pg ; et summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri et corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS , vel ut summa aequalium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphaera tota, hinc inde aequaliter a centro sphaerae distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut sphaera tota et ut distantia PS conjunctim. Q. E. D.

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphaeram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua sphaera illa trahitur, erit ut distantia PS . Q. E. D.

*Cas. 3.*TAB. VII.
FIG. 65.

SECTIO
QUARTA.

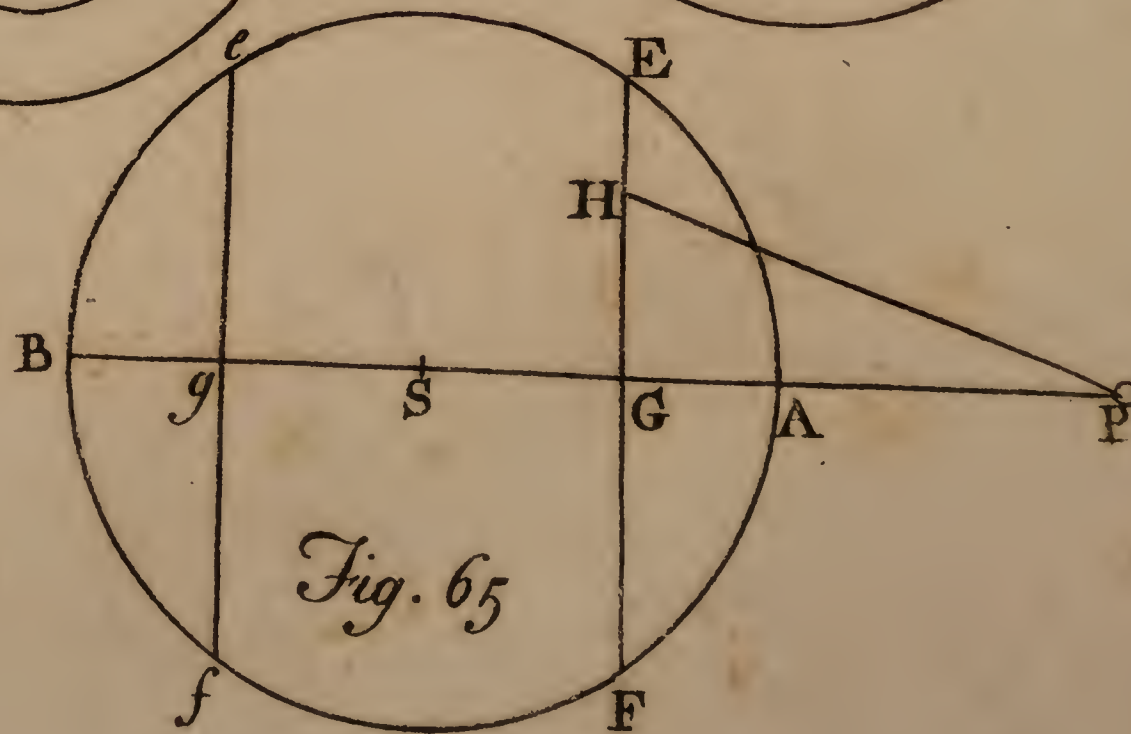
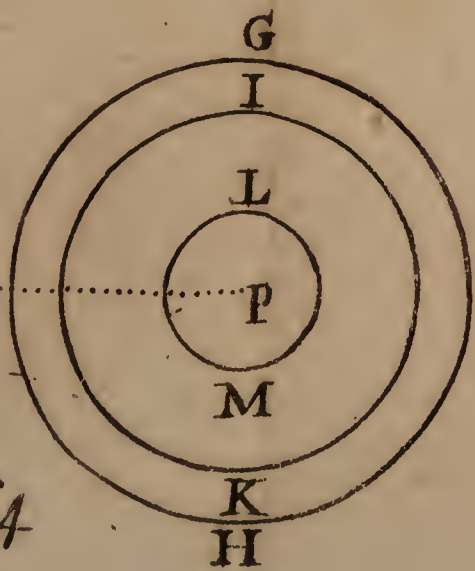
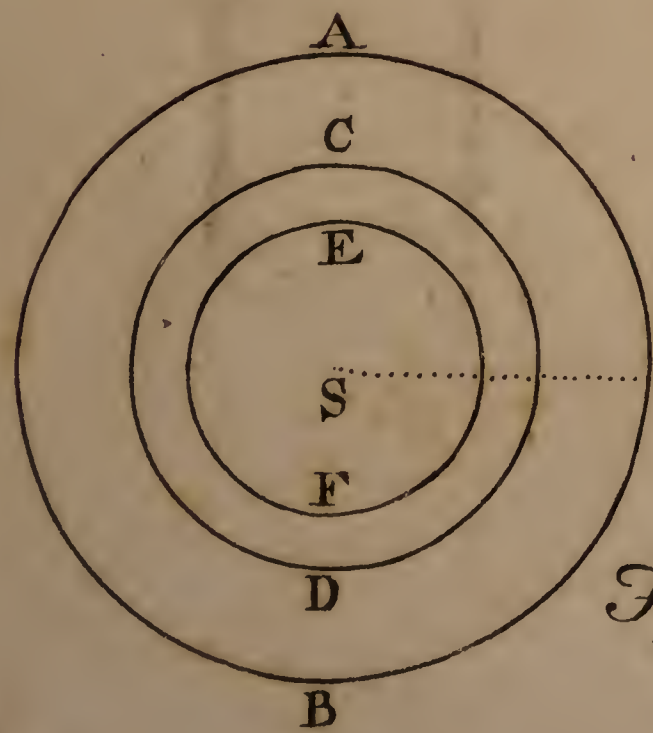
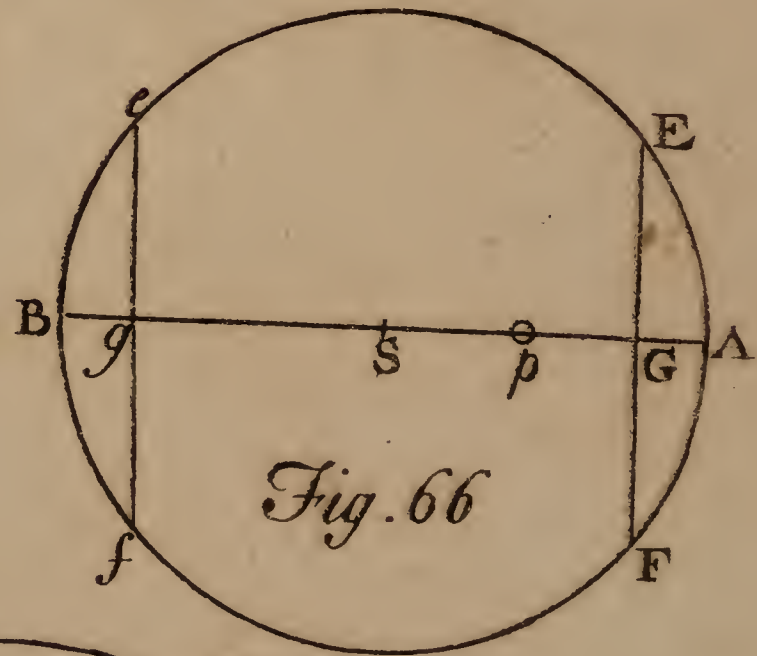
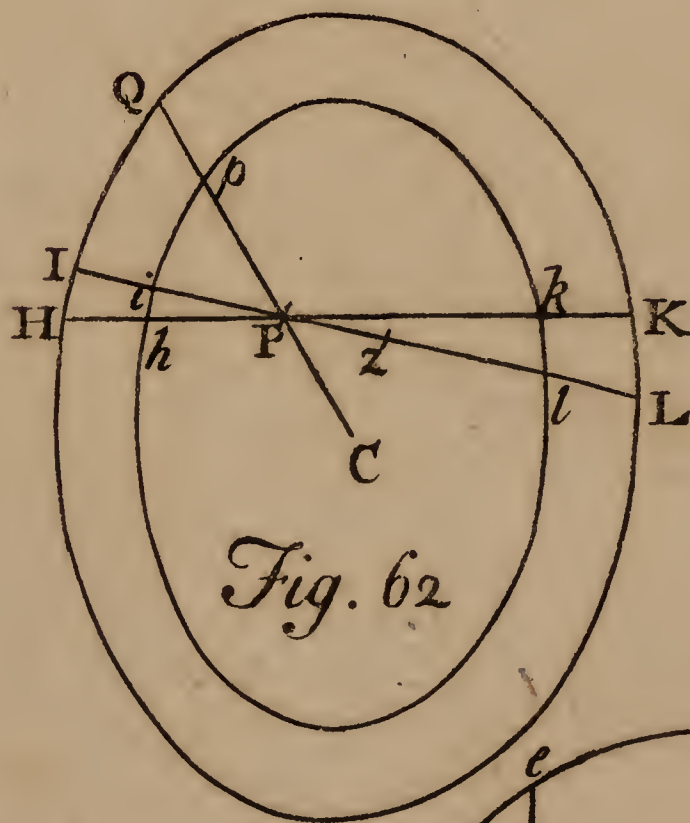
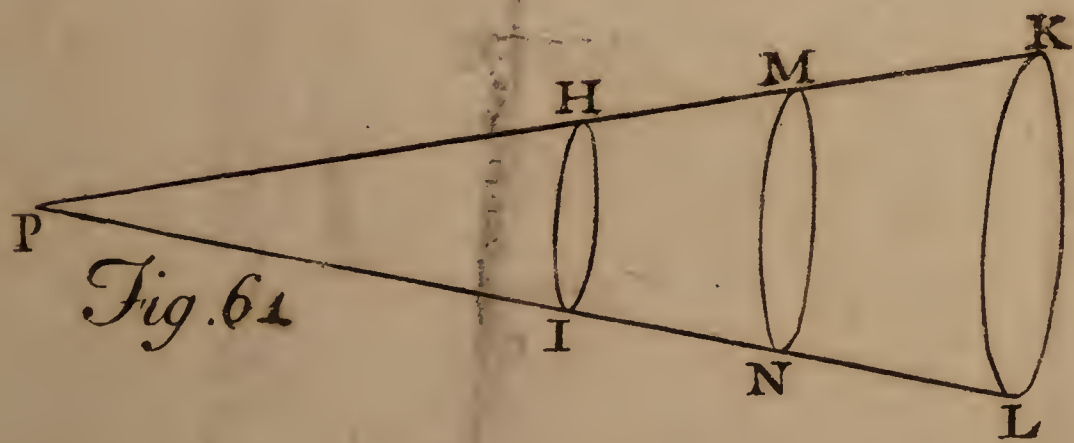
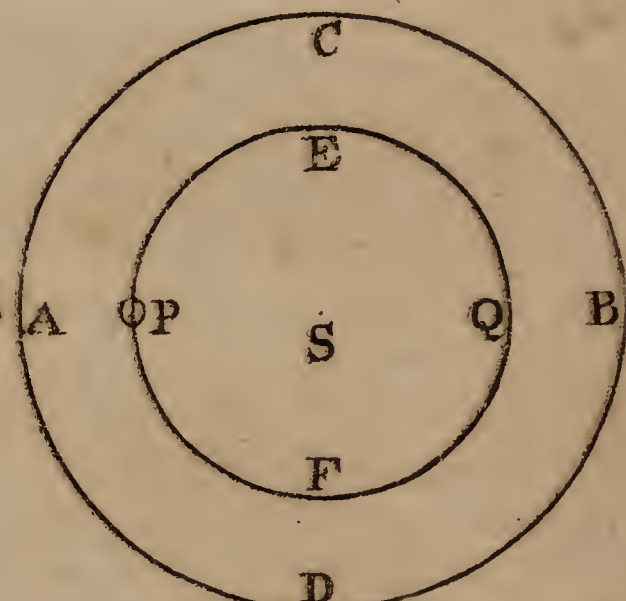
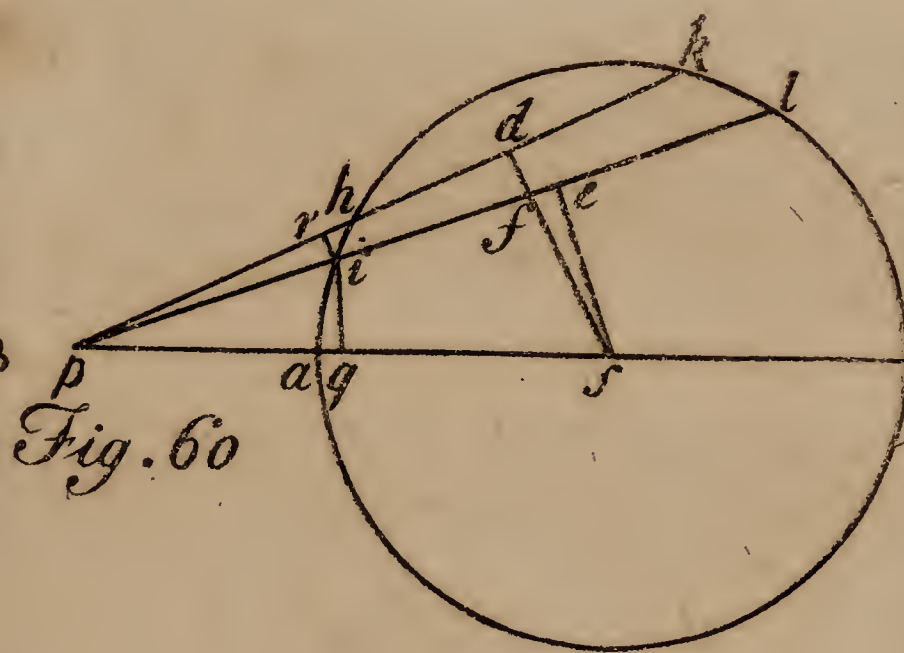
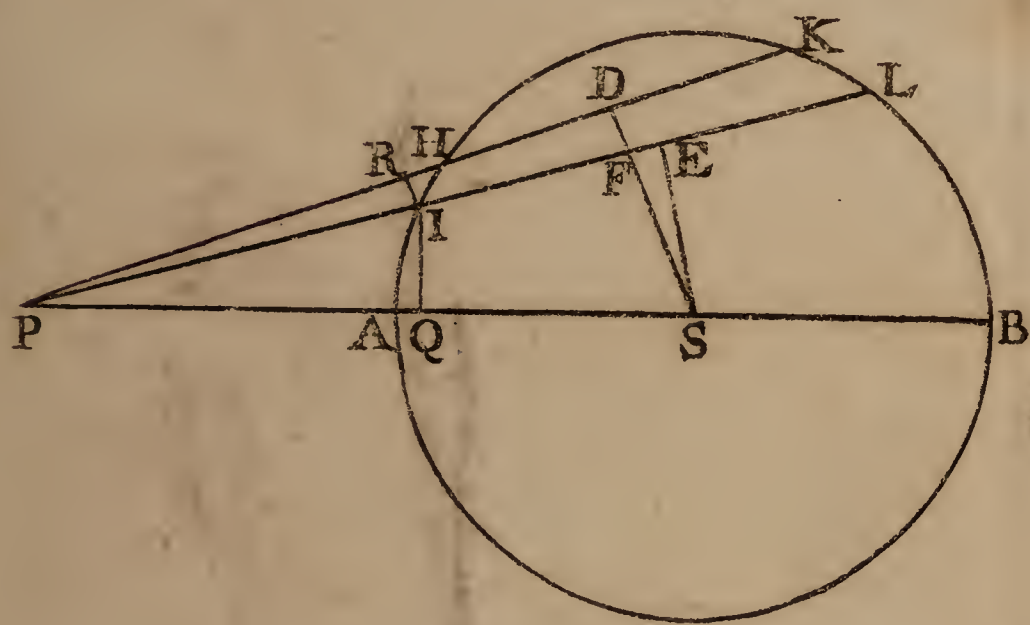
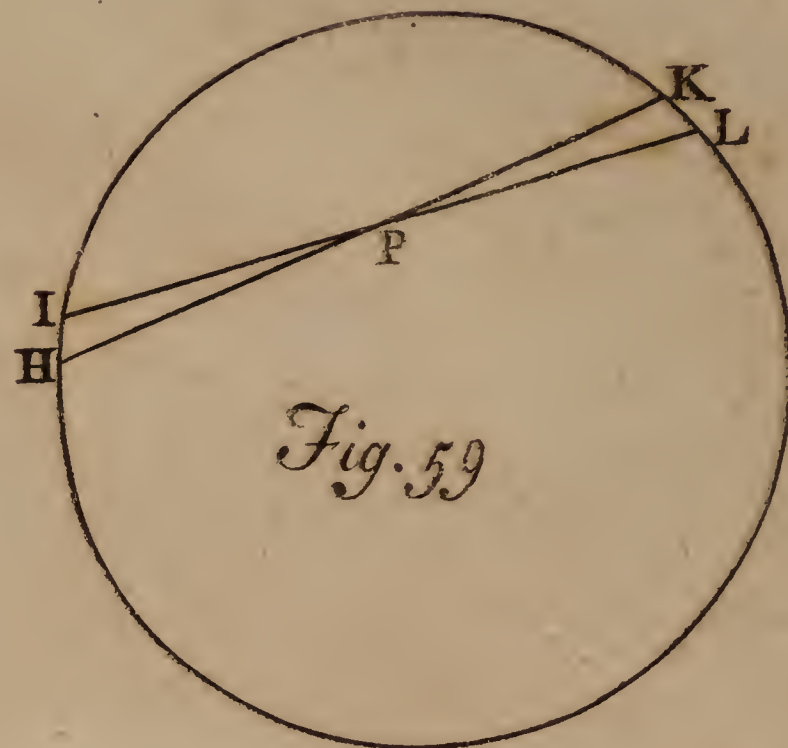
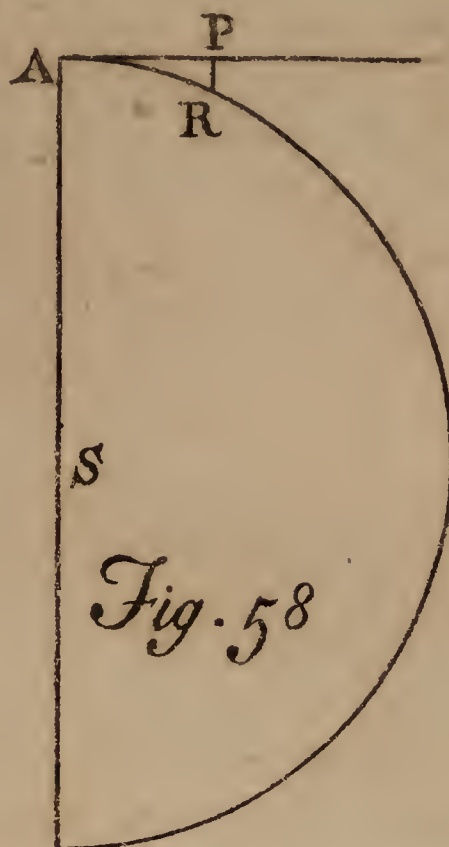
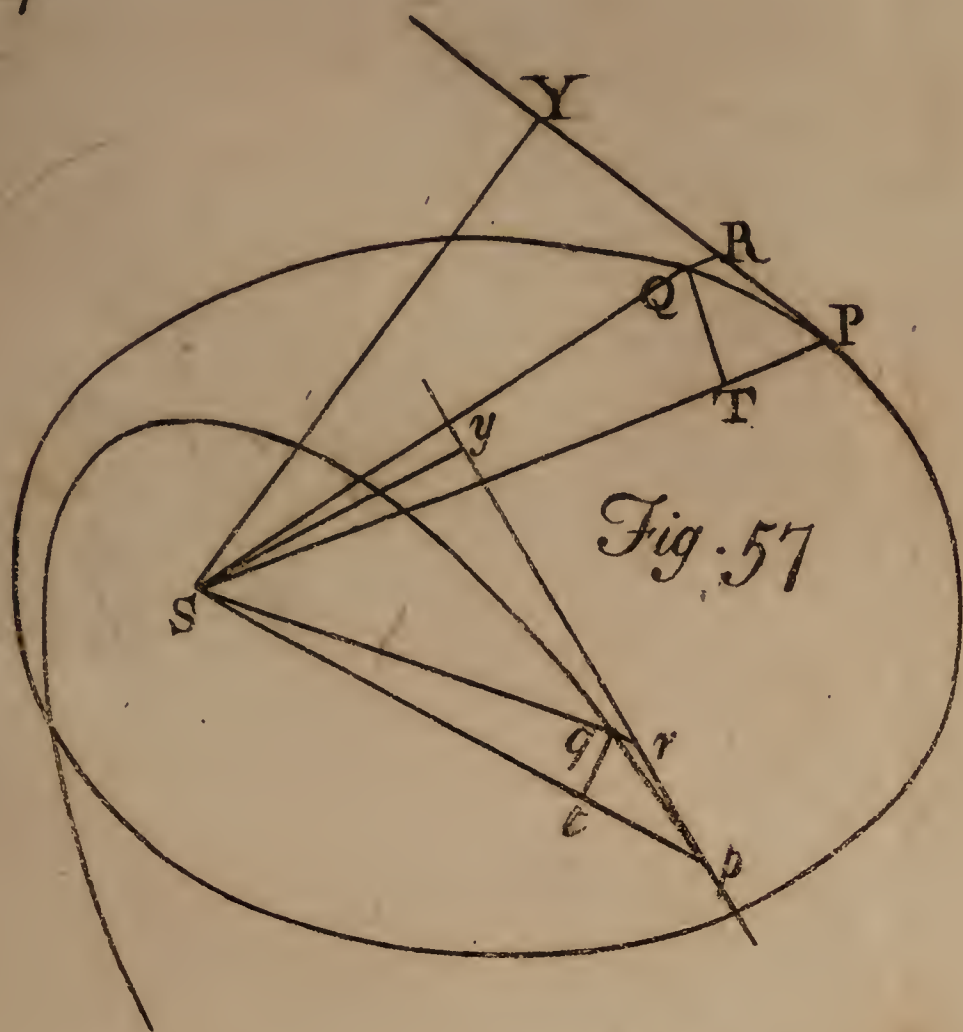
Cas. 3. Componatur jam sphaera altera ex corpusculis innumeris P ; et quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro sphaerae primae et ut sphaera eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphaerae; vis tota, qua corpuscula omnia in sphaera secunda trahuntur, hoc est, qua sphaera illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphaera illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphaerae primae, et propterea proportionalis est distantiae inter centra sphaerarum. Q. E. D.

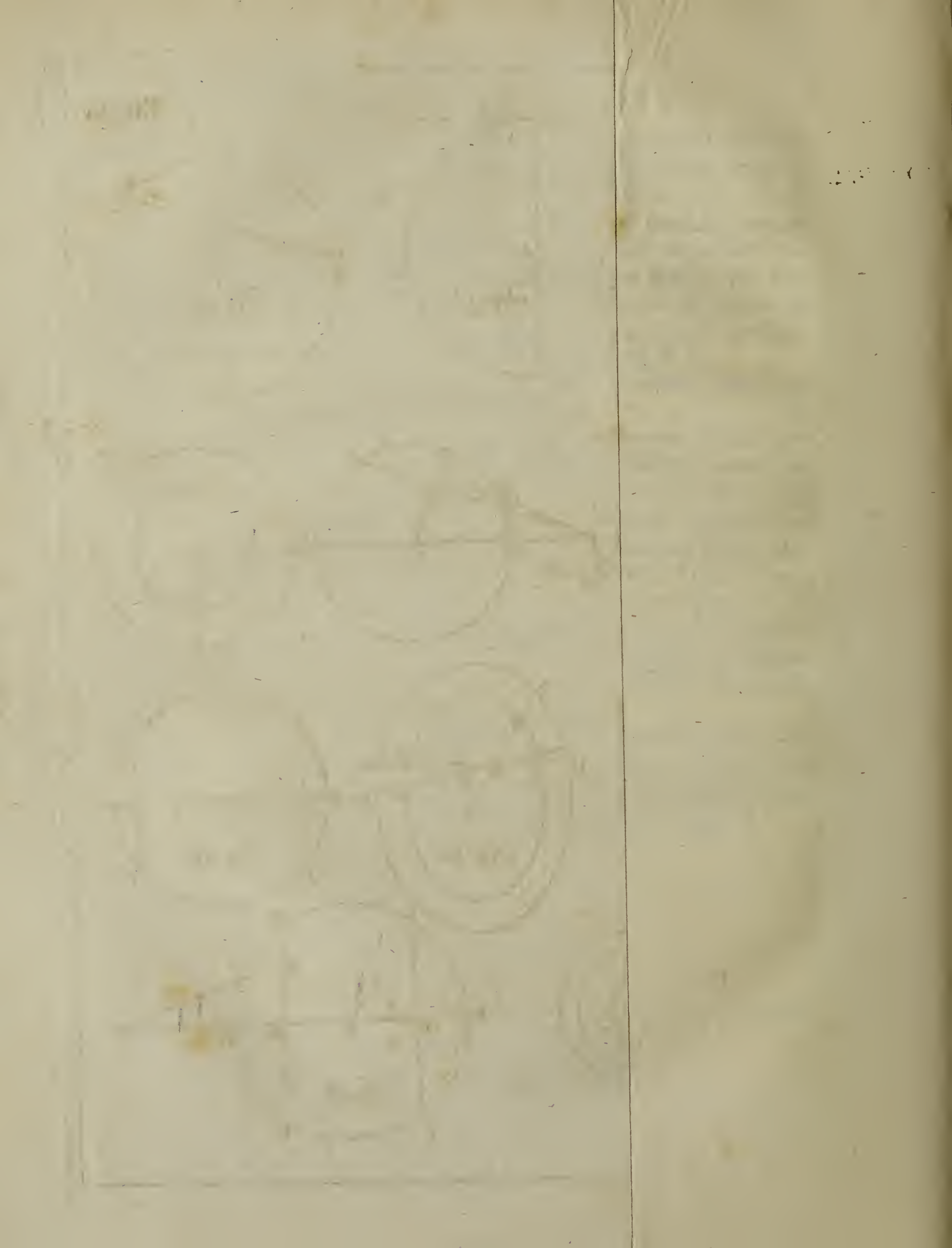
Cas. 4. Trahant sphaerae se mutuo, et vis geminata proportionem priorem servabit. Q. E. D.

TAB. VII.
FIG. 66.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra sphaeram $AEBF$; et quoniam vis plani ef in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo et distantia pg ; et vis contraria plani EF ut solidum contentum sub plano illo et distantia pG ; erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa aequalium planorum ducta in semissem differentiae distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro sphaerae. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF , ef in sphaera tota, hoc est, attractio sphaerae totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaera tota, et ut pS distantia corpusculi a centro sphaerae. Q. E. D.

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphaerae unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . Q. E. D.





8: 8: 12.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XIX.

SECTIO
QUARTA.

Si sphaeræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcumque dissimilares et inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similes; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum.

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo, quo propositio XXV. ex propositione XXIV. demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, et attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

SECTIO
QUINTA.

SECTIO V.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Efficiendum est ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quiescente.

TAB. VIII.
FIG. 67.

In orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K . A centro C agatur semper Cp , quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VCp angulo VCP proportionalem constituat; et area, quam linea Cp describit, erit ad aream VCP , quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis Cp ad velocitatem lineæ describentis CP ; hoc est, ut angulus VCp ad angulum VCP , (ⁿ) ideoque in data ratione, et propterea temporis proportionalis. Cum area temporis proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto p in curva illa linea quam punctum idem p ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp , et linea Cu lineæ CV , atque figura uCp figuræ VCP æqualis, et corpus in p semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis uCp , eodemque tempore describet arcum ejus up quo corpus aliud P , arcum ipsi similem et æqualem VP in figura quiescente VPK descri-

TAB. VIII.
FIG. 68.

(ⁿ) 123. Si trianguli ABC duo latera AB , AC sint æqualia duobus lateribus ab , ac trianguli abc ; erunt areæ triangulorum ut sinus angulorum intermediorum. Demissis enim perpendicularibus BD , bd , areæ eorum sunt ut $AC \times BD$ ad $ac \times bd$, vel ut BD ad bd ; id est, posito AB aut ab pro radio, ut sinus anguli BAD ad sinum anguli bad .

Si igitur sit angulus $VCp : VCP :: G : F$, et $VCq : VCQ :: G : F$, est pCq ad PCQ in eadem ratione. Sed $PC = pC$, et $QC = qC$; ergo area trianguli pCq est in statu nascenti ad aream trianguli PCQ , ut G ad F , vel in eadem datâ ratione.

describere potest. Quærat igitur, per corollarium quintum propositionis v, vis centripeta qua corpus revolvi possit in curva illa linea quam punctum p describit in plano immobili, et solvetur problema. (°) Q. E. F.

SECTIO
QUINTA.

PROPOSITIO XXIX. THEOREMA XX.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis VP , PK funto similes et æquales orbis revolventis partes up , pk ; et punctorum P , K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr , idemque produc ad m , ut sit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP . Quoniam corporum altitudines PC et pC ,

TAB. VIII.
FIG. 69.

(°) 124. Fingatur corpus in trajectoriâ quâcunque revolvi vi tendente ad immobile punctum, areasque tempori proportionales describere; in hoc casu angularis velocitas radii vectoris in inversâ duplicatâ ratione distantie variabitur (101). Ut vero ea quæ sequuntur facilius concipiantur, ponamus semitam corporis VPK rigescere, vel motum eundem confici in linea physicâ crassitudinis contemnendæ, interea dum hæc orbita motu transverso et angulari velocitate semper quadrato distantie corporis reciproce proportionali circa centrum virium C revolvatur; hoc motu composito linea quædam Vpq in spatio immobili describetur, et angularis velocitas radii vectoris Cp hanc lineam describentis erit æqualis summis angularium velocitatum corporis in orbitâ moventis et orbitæ ipsius, hoc est inversè ut quadratum distantie, et proinde area hoc motu descripta in eadem ratione ac in orbitâ immobili variabitur; area autem in orbitâ immobili est tempori proportionalis, ergo in orbitâ motu hoc composito descriptâ erit etiam area tempori proportionalis. Ponamus jam corpus in spatio non resistente hoc modo moveri, tendetque vis centripeta ad punctum immobile circa quod areæ illæ describuntur. Temperari fingamus impulsus vis centripetæ, ita ut corpus movens secundum legem prædictam in hac linea semper inveniatur, et eadem erunt phænomena, vis, et motus projectilis, utrum primo fingamus corpus revera hanc lineam circa punctum immobile describere, vel in trajectoriâ datâ revolvi, interea dum hæc trajectoria motu transverso circa centrum virium revolvitur.

SECTIO
QUINTA.

pC , KC et kC semper æquantur, manifestum est quod linearum PC et pC incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P et p existentium distinguantur motus singuli (per legum corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC , pC determinantur, et alteri prioribus transversi sint, et secundum lineas ipsis PC , pC perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, et motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P , ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC , id est, ut angulus VCp ad angulum VCP . Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K , corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C , ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr , quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis est; et motu transverso acquireret distantiam a linea pC , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC , ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P . Quare cum kr æqualis sit distantie quam corpus P acquirit a linea PC , fitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP , hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P , manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m . Hæc ita se habebunt ubi corpora p et P æqualiter secundum lineas pC et PC moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur (^P). Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCp ad angulum VCP ; fitque nC æqualis kC , et corpus p completo illo tempore revera reperietur in n ; ideoque vi majore urgetur quam corpus P , si modo angulus nCp angulo kCp major est, id est si orbis upk vel movetur

(^P) 125. Corpora P , p æqualibus viribus secundum lineas PC , pC moventur, quæ lineæ initio motus sunt ipsæ æquales; distantie tamen completo illo tempore non erunt æquales, nec p in loco n reperietur; manifestum enim est, quod corpora cum diversis velocitatibus ab eodem puncto projecta non æqualiter a recto tramite deflectant ni vires centripetæ augeantur vel diminuantur; sit igitur motus transversus corporis p major vel minor quam corporis P , corpora illa non eandem acquirerent distantiam, ni motui corporis p addatur vel subducatur vis quædam mn .

vetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea CP in consequentia fertur; et vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia ⁽¹⁾. Estque virium differentia ut locorum intervallum mn , per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur circulus secans lineas mr , mn productas in s et t , et erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triacula pCk , pCn dato tempore dentur magnitudine, sunt kr et mr , earumque differentia mk et summa ms reciproce ut altitudo pC , ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC . Est et mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo pC . Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; et hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascent mn , eique proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC . Q. E. D. ⁽¹⁾

Corol. 1.

⁽¹⁾ 126. Quoniam est mr ad kr ut VCp ad VCP , prout VCp major est, vel minor, vel æqualis VCP , erit mr major vel minor vel æqualis ipsi kr ; et mn positiva, negativa, vel evanescens. Si orbis upk moveatur in consequentia, patet mr majorem esse quam kr ; ideoque vis altera priori addenda est, quâ corpus p describat mn . Si orbis upk in antecedentia moveatur cum celeritate duplâ ejus quâ linea CP in consequentia fertur, erit angulus VCu æqualis duplo VCP , et VCp æqualis VCP ; corpusque in oppositam partem movens, describet orbem similem et æqualem ipsi VPK : si orbis in antecedentiâ movetur majori vel minori velocitate, patet mr majorem esse vel minorem quam kr , et vim mn in uno casu addendam esse, in altero subtrahendam. Si orbis in antecedentiâ movetur eâdem celeritate quâ CP fertur in consequentia motus transversus destruetur, corpusque p inter apsides movens rectâ lineâ ascendet descendetque vicissim.

⁽¹⁾ 127. THEOREMA. Vis centrifuga, quæ a motu circulari oritur, est in omni orbitâ, in quâ æquales areæ æqualibus temporibus describuntur in reciproca triplicatâ ratione distantiae.

Cas. 1. Sit enim primò directio PR ad radium SP perpendicularis. Corpus P duabus agitatum viribus accedet vel recedet a centro cum vi quæ est differentia virium centripetarum et centrifugarum: describatur circulus PB cum eâdem angulari velocitate quâ orbita PQ , si corpus accedat, vel Pq , si corpus recedat a centro virium; et erit QB accessus corporis ad centrum in priori casu, et qB recessus

TAB. VIII.
FIG. 70.

SECTIO
QUINTA.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P et p , vel K et k , est ad vim qua corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PK , ut lineola nascens mn ad finem versum arcus nascentis PK , id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est, si ca-

pianantur

recessus a centro in altero. Sunt igitur QB , qB differentiae inter vires centripetas RQ , Rq et vires centrifugas in orbitis PQ , Pq respectivè; et proinde vires centrifugae in his orbitis experimentur per quantitates $RQ - QB$ et $Rq + qB$, quae aequales sunt vi RB quâ circulus cum eâdem angulari velocitate describitur. Vires autem RB sunt semper ut quadrata arcuum simul descriptorum directè, et ut radii inversè; et ob areas aequales semper arcibus simul descriptis in orbitis PQ , Pq , et proinde aequales inter se, erunt semper arcus inversè ut radii, et vires inversè ut cubi radiorum. Q. E. D.

TAB. VIII.
FIG. 71.

Cas. 2. Sit jam directio Pr ad SP obliqua: ob directionem projectionis defertur corpus propius ad centrum quàm prius per spatium Rr , et ob vim attractivam corporis S describit præterea spatium rQ : est autem BQ , accessus nempe corporis versus centrum, aequalis differentiae inter RQ totum motum corporis versus centrum et vim centrifugam; et proinde manet vis centrifuga aequalis vi RB quâ circulus describitur, ut in priori casu.

128. *Cor. 1.* Ex demonstratione sequitur, quòd si areae non sint temporibus proportionales, vires centrifugae erunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum directè, et ut cubi distantiarum inversè: nam arcus circulorum sunt ut areae descriptae directè et distantiae inversè; et proinde quadrata arcuum per distantias divisa erunt ut quadrata arearum divisa per cubos distantiarum.

129. *Cor. 2.* Sequitur etiam quòd vis centrifuga sit ad vim centripetam, ut chorda illa curvaturae quae per centrum virium transit ad duplam distantiam; nam vis centrifuga est vis quâ circulus eâdem angulari velocitate describitur, et hæc vis est ad vim in orbitâ PQ directè in duplicatâ ratione velocitatum, et inversè ut chordae curvaturae (42), i. e. ob aequales velocitates, ut chordae illae inversè.

130. His positis, Prop. xxix. sic demonstrari potest aliter. Quoniam corpora per hyp. æqualiter versus centrum accedunt vel recedunt, erit differentia virium centripetarum et centrifugarum in mobili orbitâ æqualis differentiae virium in immobili: et proinde differentia virium centrifugarum erit æqualis differentiae gravitatum. Sit angulus VCp ad angulum VCP in datâ ratione G ad F , erunt areae datis temporibus descriptae et areae totae in eâdem ratione; vis centrifuga in mobili orbitâ est ad vim in immobili, datâ distantia CP , ut G^2 ad F^2 (128); et proinde differentia virium erit ad vim centrifugam in immobili orbitâ in datâ ratione $GG - FF$ ad FF ; vires autem centrifugae in immobili et in mobili orbitâ variantur in diversis distantiiis in reciprocatâ triplicatâ ratione distantiarum (127); et proinde differentia virium centrifugarum, eique æqualis differentia gravitatum, erit in eâdem ratione. Q. E. D.

piantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp , ut $GG - FF$ ad FF . Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur sector circularis æqualis areæ toti VPC , quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit; differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili et corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, qua corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area VPC , uniformiter describere potuisset, ut $GG - FF$ ad FF . Namque sector ille et area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur. ^(s)

Corol. 2. Si orbis VPK ellipsis sit umbilicum habens C et apsidem summam V ; eique similis et æqualis ponatur ellipsis upk , ita ut sit semper pC æqualis PC , et angulus VCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F ; pro altitudine autem PC vel pC scribatur A , et pro ellipseos latere recto ponatur $2R$: erit vis, qua corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$

et contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, et vis in V erit $\frac{FF}{CV \text{ quad.}}$. Vis autem

qua corpus in circulo ad distantiam CV ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in V , est ad vim qua corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V , ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum CV , ideoque valet $\frac{RFF}{CV \text{ cub.}}$:

et vis quæ sit ad hanc ut $GG - FF$ ad FF , valet $\frac{RGG - RFF}{CV \text{ cub.}}$:

estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipsi immota VPK , et corpus p in ellipsi mobili

^(s) 131. Aliter. Quoniam vis centrifuga sit vis quâ circulus eâdem angulari velocitate describitur, erit per 130. differentia virium ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PK , in datâ ratione $GG - FF$ ad FF .

132. *Cor. 2.* et 3. in *Cor. 4to.* includuntur, et eâdem demonstrantur methodo.

SECTIO
QUINTA.

mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A fit ad seipsam in altitudine CV ut

$\frac{1}{A \text{ cub.}}$ ad $\frac{1}{CV \text{ cub.}}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit

$\frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, qua corpus revolvi potest in

ellipfi immobili VPK , addatur excessus $\frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$; et com-

ponetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$ qua corpus in ellipfi mo-

bili upk iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobili VPK ellipsis fit centrum habens in virium centro C ; eique similis, æqualis et concentrica ponatur ellipsis mobilis upk ; sitque $2R$ ellipseos hujus latus rectum principale, et $2T$ latus transversum five axis major, atque angulus VCp semper sit ad angulum VCP ut G ad F ; vires, quibus corpora in ellipfi immobili et mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T \text{ cub.}}$ et

$\frac{FFA}{T \text{ cub.}} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T , et radius curvaturæ quam orbis VPK habet in V , id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R , et vis centripeta, qua corpus in trajectoria quacunque immobili VPK revolvi potest in loco V , dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P indefinite dica-

tur X , altitudine CP nominata A , et capiatur G ad F in data ratione anguli VCp ad angulum VCP : erit vis centripeta, qua corpus idem eisdem motus in eadem trajectoria upk circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A \text{ cub.}}$ (*).

Corol. 5.

(*) 133. Aliter. Vis centrifuga in loco V est ad vim centripetam $\frac{VFF}{TT}$, ut chorda curvaturæ ad duplam distantiam (129), vel ut R ad T , et proinde æqualis est

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, et inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur perpendicularum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP , et ipsi æqualis agatur Cp , constituens angulum VCp , qui sit ad angulum VCP in data ratione; vis, qua corpus gyrari potest in curva illa Vpk quam punctum p perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis Cp . Nam corpus P per vim inertiae, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta VP . Addatur vis in centrum C , cubo altitudinis CP vel Cp reciproce proportionalis, et (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk .

TAB. VIII.
FIG. 72.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA X.

Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.

Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cuius apfides requiruntur, et quærendo apfides orbis quem corpus illud

est $\frac{VRFF}{T^3}$; differentia virium est ad vim centrifugam $\frac{VRFF}{T^3}$, ut $GG - FF$ ad FF , et proinde æqualis est $\frac{VRGG - VRFF}{T^3}$; cum autem hæc sit ad differentiam in aliâ quâvis altitudine A , ut A^3 ad T^3 , differentia in omni altitudine A valebit $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$: ad vim igitur X , quâ corpus revolvi potest in immobili orbitâ, addatur excessus $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, et componetur vis tota $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ quâ corpus in eadem trajectoriâ circulariter motâ iisdem temporibus revolvi possit.

SECTIO
QUINTA.

illud in plano immobili describit (^u). Orbes autem eandem acquirant formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales (^v).

Sit

(^u) 134. In orbitis similibus et æqualibus, vires, si sumantur æquales distantiae et correspondentes, vel æquales sunt, vel datam ad se rationem semper conservant (per hæcenus demonstrata): hinc si orbita detur vi quacunque descripta, et fingatur vis ad centrum aliud tendens, quæ ad eandem distantiam a centro suo vel æqualis est vel in datâ ratione ad vim priorem, possibile erit, ob vim in utroque casu in eadem ratione variantem, tali velocitate et tali directione corpus projicere, ut orbitam similem et æqualem priori describat; si vero in hac orbitâ erui potest apsidum motus angularis, eruetur etiam in priori.

(^v) 135. Fingatur corpus revolvi in ellipsi revolvente, et orbita motu composito in spatio immobili descripta circularis non evadet si orbita elliptica excentrica sit, et summa vel differentia virium in nullâ certâ et determinatâ ratione distantiae variabitur; quo vero propius appropinquat orbita revolvens ad formam circularem, orbita in spatio immobili descripta eo propius accedet ad formam circularem, et lex in quâ variatur summa vel differentia virium eo propius accedet ad quandam determinatam legem distantiae; etenim, si orbita revolvens fiat circularis, orbita in spatio immobili etiam fiet circulus diversâ velocitate angulari descriptus, et lex in qua variatur summa vel differentia virium ea evadet (vel fractionalis vel integra) ad quam antea perpetuo accedebat. Si enim orbita sit revera circularis, propter distantias æquales summæ vel differentiæ virium quantitas erit invariabilis, et proinde hanc quantitatem fingere licet in datâ qualibet vel directâ vel inversâ ratione distantiae variari: ergo, orbitâ jamjam abiturâ in circulum angulari motu regulari describendum, fingere licet unamquamque orbitam propemodum circularem describi motu corporis in ellipsi revolvente moventis, motumque in hac orbita à vi variante in quâdam certâ lege distantiae vel fractionali vel integrâ oriri, ex eo quod differentia per quam à tali orbitâ abludat minor sumi potest [quantitate ullâ quæ assignari potest, faciendo nimirum ut orbita ad orbitam circularem perpetuo appropinquet.

136. Detur orbita utcunque anomala et vi tendente ad punctum immobile descripta; capiantur distantiae maximæ et minimæ quæ se invicem immediate sequuntur, et describatur ellipsis summâ harum distantiarum pro axe, et dimidio differentiae pro excentricitate; ita temperari potest motus hujusce ellipsis, ut corpus in illa revolvens semper in orbita datâ inveniatur, in hoc casu forsitan motus non fit necessario secundum legem propositionis 29 temperatus; quoniam vero corpus in ellipsi mobili revolvens orbitam quamlibet datam describere potest; et quoniam, si orbita descripta sit circularis, hæc orbita describi potest à corpore in orbitâ circulari revolvente, interea dum hæc ipsa orbita revolvetur, sequitur quod perpetuo accessu orbitæ datæ ad formam circularem, motusque angularis ad motum constantem, orbita perpetuo

Sit punctum V apsis summa, et scribantur T pro altitudine maxima CV , A pro altitudine quavis alia CP vel Cp , et X pro altitudinum differentia $CV - CP$; et vis, qua corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, id

est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, substituendo $T - X$ pro A , erit

ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A \text{ cub.}}$. Reducenda similiter est vis

alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit $A \text{ cub.}$ et numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$, five (scribendo $T - X$ pro A in numeratore) ut $\frac{T \text{ cub.} - 3 TTX + 3 TXX - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$; et collatis numeratorum

terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis et non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T \text{ cub.}$ ut $- FFX$ ad $- 3 TTX + 3 TXX - X \text{ cub.}$ five ut $- FF$ ad $- 3 TT + 3 TX - XX$ (*). Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime fini-

petuo appropinquet ad formam orbitæ quæ ab ellipsi revolvente secundum leges prop. 29. describi potest, donec tandem ab orbitâ tali quantitate minori ullâ quæ assignari potest abludat; in hoc casu orbitæ evadere ponantur similes et æquales, et exinde vires proportionales: quoniam vero ope quantatum vi centripetæ in ellipsis proportionalium erui potest ellipsis motus, eruetur etiam apsidum motus in orbitâ, quæ, comparatione virium, orbitæ descriptæ ab ellipsi mobili reddetur similis et æqualis.

(*) 137. Si quantitates duæ $a + x$ et $b + y$ componantur ex partibus datis a et b , et ex partibus non datis, simul tamen nascentibus, vel simul evanescentibus, x et y ; fuerit autem $a + x$ ut $b + y$; erit semper x ad y ut a ad b . DEM. Cum enim ponatur $a + x$ ut $b + y$, erit semper $a + x$ ad $b + y$ in datâ ratione: nascentibus autem vel evanescentibus x et y , est $a + x$ ad $b + y$, ut a ad b ; quare $a + x$ erit semper ad $b + y$, ut a ad b ; ideoque x erit ad y semper ut a ad b .

Aliter. Est $a + x : b + y :: m : n$ ex hypothesi: sit \dot{x} et \dot{y} contemporanea finita incrementa vel decrementa x et y , et erit $a + x + \dot{x} : b + y + \dot{y} :: m : n$

SECTIO
QUINTA.

finitimus, coeat orbis cum circulo; et ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T cub. ut FF ad $3TT$, seu GG ad TT ut FF ad $3TT$, et vicissim GG ad FF ut TT ad $3TT$, id est, ut 1 ad 3 ; ideoque G ad F , hoc est angulus $V Cp$ ad angulum VCP , ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180 ; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiet angulum $V Cp$ graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id i-

deo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, et orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam et apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu $103\text{ gr. } 55\text{ m. } 23\text{ sec.}$ ad centrum; perveniens ab apside summa ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, et inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; et sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ et n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales,

ex hypothesi; ergo $a + x + \dot{x} : b + y + \dot{y} :: a + x : b + y$; et $ab + bx + b\dot{x} + ay + yx + y\dot{x} = ab + ay + a\dot{y} + bx + xy + x\dot{y}$; et $b\dot{x} + y\dot{x} = a\dot{y} + x\dot{y}$; atque idcirco $\dot{x} : \dot{y} :: a + x : b + y :: m : n$. Si vero contemporanea incrementa vel decrementa quantitatum duarum, quæ simul existere incipiunt, semper vel æquales sint vel in eâdem ratione, quantitates ipsæ vel æquales erunt, vel in hâc ratione; hoc est, erit $x : y :: a + x : b + y$ in omni casu, et $bx + yx = ay + yx$, vel $bx = ay$, atque idcirco $x : y :: a : b$.

les, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T - X}^n$ in seriem indeterminatam per methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - n XT^{n-1} + \frac{n n - n}{2} XX T^{n-2} \&c.$

Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-n T^{n-1} + \frac{n n - n}{2} XT^{n-2} \&c.$ Et sumendo rationes ulti-

mas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-n T^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad $n T^{n-1}$, et vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad $n T^{n-1}$ id est ut 1 ad n ; ideoque G ad F , id est angulus VCp ad angulum VCP , ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus VCP , in descensu corporis ab apside summa ad apsidem imam in ellipsi confectus, fit graduum 180; conficietur angulus VCp , in descensu corporis ab apside summa ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; et hoc angulo repetito corpus redibit ab apside ima ad apsidem summam, et sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 et \sqrt{n} æqualis 2; ideoque angulus inter

apsidem summam et apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90 gr.

Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, et completa alia quarta parte ad apsidem summam, et sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex propositione IX. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem

summam

SECTIO
QUINTA.

summam et imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m.

45 sec. & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli huius repetitione, vicibus alternis ab apside summa ad imam et ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut

$\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, et $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. et propterea corpus

de apside summa discedens et subinde perpetuo descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: et sic per vices in æternum. (y)

Exempl. 3. Affumentes m et n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, et b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim cen-

* (y) 138. Sit vis centripeta ut altitudinis dignitas quælibet cujus index est $n - 3$. Quæritur angulus inter apsidem summam et apsidem imam secundum hypothesin corollarii tertii ubi nimirum centrum virium coincidit cum centro communi ellipsium.

Secundum hanc hypothesin, adhibitâ notatione Newtonianâ, vis centripeta est ut $\frac{F^2 A}{T^3} + \frac{R G^2 - R F^2}{A^3}$. Scribatur 1 pro T vel R , et vis centripeta jam erit

ut $F^2 A + \frac{G^2 - F^2}{A^3}$, hoc est ut $\frac{F^2 A^4 + G^2 - F^2}{A^3}$. Est autem $A^4 = 1 - 4 X$ &c. et $F^2 A^4 = F^2 - 4 F^2 X$, &c. quare vis centripeta est ut $\frac{F^2 - 4 F^2 X + G^2 - F^2}{A^3}$, vel ut $\frac{G^2 - 4 F^2 X}{A^3}$; ponitur autem vis centripeta

ut A^{n-3} vel $\frac{A^n}{A^3}$; quare A^n est ut $G^2 - 4 F^2 X$: sed $A^n = 1 - n X$, &c. quare $G^2 - 4 F^2 X$ est ut $1 - n X$; unde est G^2 ad 1, ut $4 F^2$ ad n ; unde $G^2 \times n = 4 F^2$, et $G^2 = \frac{4 F^2}{n}$, et $G = \frac{2 F}{\sqrt{n}}$. Sed in hac hypothesi est F 90 Grad.

cum sit 90 Grad. angulus inter apsidem summam et apsidem imam in ellipsi quiescente: Quare angulus inter apsidem imam, ubi vis centripeta est ut A^{n-3} erit $\frac{180}{\sqrt{n}}$, idem nimirum qui prodit ex hypothesi corollarii secundi.

centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A \text{ cub.}}$

seu (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.}{A \text{ cub.}}$$

et collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$

ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2}$

$+ \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2} \&c.$ Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt

ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ab $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, et vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmetice per unitatem

(²) fit GG ad FF ut $b + c$ ad $mb + nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb + nc}{b + c}$.

Unde est G ad F , id est angulus VCp ad angulum $VC P$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb + nc}{b + c}}$. Et propterea cum angulus $VC P$ inter apsidem sum-

mam et apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus VCp inter easdem apsidem,

in orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqualis angulo gra-

duum $180 \sqrt{\frac{b + c}{mb + nc}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit

ut $\frac{bA^m - cA^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter apsidem invenietur graduum 180

(²) 139. Ratio subduplicata quantitatum $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ semper exprimet rationem G ad F , substituendo quemlibet numerum pro altitudine maximâ T : si numerus substituatur unitate major vel minor, quantitates T^{m-1} et T^{n-1} non erunt sibi invicem æquales, et proinde ratio G ad F non exprimetur in terminis quantitatum $b + c$ et $mb + nc$: ponendo vero T unitati æqualem, T^{m-1} et T^{n-1} erunt sibi invicem æquales, et ratio prædicta $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, semper exprimens rationem G^2 ad F^2 , hac methodo eruta prodibit ratio $b + c$ ad $mb + nc$.

SECTIO
QUINTA.

$\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur problema in casibus difficiliori-

bus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes *A cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, et pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro *T*, obtinebitur proportio *G* ad *F*.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; et contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, et altitudo nominetur *A*: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per exempla secunda manifestum est ^(a).

Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse ^(b). Corpus tali

vi.

^(a) 140. Per exempla secunda manifestum est, quod motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem sit $\frac{360}{\sqrt{p}}$, posito quod vis centripeta sit ut altitudinis *A* dignitas quælibet A^{p-3} , cujus index est $p-3$; in hoc corollario exprimitur motus ille per $\frac{360m}{n}$; sit igitur $\frac{360m}{n} = \frac{360}{\sqrt{p}}$, et per resolutionem æquationis sit $p-3 = \frac{nn}{mm} - 3$, quo substituto, est vis centripeta ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

^(b) 141. Hoc est, orbita qua movetur corpus cum vi, quæ in recessu a centro decrescit in majori quam triplicata ratione altitudinis, non describi potest motu corporis in peripheria ellipseos, dum ellipsis revolvitur circa focum suum: patet enim quantitatem $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ non exprimere majorem quam inversam triplicatam distantiae rationem, ni ponatur $\frac{nn}{mm}$ negativa, in hoc casu

fit motus apsidum $360 \times \sqrt{-\frac{mm}{nn}}$, quæ est quantitas impossibilis.

vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de qua egimus in corol. 6. prop. xxix (^c). Sin cœperit illud, de apside discedens (^d), vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de qua actum est in eodem corollario. (^e) Sic et ubi vis, in recessu a centro, decrescit in

(^c) 142. Si enim vis gravitatis sit in apside illâ major quam vis centrifuga, quoniam in eâdem variatur ratione, erit semper major, corpusque versus centrum perpetuo descendet: et contra si minor sit, corpus ascendet in infinitum, neque ad maximam altitudinem unquam perveniet. Idem patet ex exemplo secundo hujus problematis; nam si vis centripeta variatur in inversâ triplicatâ ratione distantiae, in quantitate A^{n-3} , sit $n = 0$; et motus angularis ab apside ad apsidem erit $\frac{180}{0}$, quæ est quantitas indefinitè magna.

(^d) 143. Si corpus non de apside discedat, ad apsidem pervenire potest. Sit enim Vpk curva de quâ actum est in Cor. 6. Prop. 29. manifestum est quòd corpus p , non ab apside discedens, movere possit a puncto p versus Q , eâ lege, ut sit semper Cp æqualis CP , et angulus VCp ad angulum VCP in data ratione: corpus p hâc lege movens, perveniet ad apsidem imam V , et postea ascendet in infinitum.

TAB. VIII.
FIG. 72.

(^e) 144. Quoniam enim vis centrifuga variatur in inversâ triplicatâ ratione altitudinis, et vis gravitatis in majore quàm in hâc ratione, patet, quòd si vis centrifuga in apside illâ major sit quàm vis gravitatis, vim centrifugam in minori decrescen-tem ratione semper majorem esse, et corpus ascendere in infinitum. Et contra, si vis centrifuga minor sit quàm vis gravitatis, quoniam in accessu corporis ad centrum minùs augeatur, erit semper minor, corpusque versus centrum descendet. Quòd major est dignitas distantiae cui vis gravitatis est reciprocè proportionalis, eò citius corpus ad centrum descendet: si vis gravitatis sit in inversâ triplicatâ ratione altitudinis, corpus non nisi infinitis revolutionibus ad centrum perveniet: si vis sit reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis, et corpus justâ projiciatur velocitate, descendet in circulo in cujus peripheriâ est centrum virium per Cor. 1. Prop. ~~VI~~ VI; et si velocitas projectionis sit ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$, corpus in centrum decidet post quartam partem revolutionis: si vis gravitatis sit reciprocè in quadruplicatâ ratione distantiae, et corpus projiciatur cum velocitate quæ est ad velocitatem quâ circulus describitur ad eandem distantiam, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, describet corpus illud epicycloidem, et post dimidiam revolutionem in centrum decidet: si gravitas sit reciprocè ut dignitas distantiae cujus index est $n + 3$, et

VI

Q

velocitas

SECTIO
QUINTA.

in maiore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. ^(f) At si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: et contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decrescet: et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summa ad apsidem summam alterno descensu et ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$:
erit

velocitas projectionis sit ad velocitatem quâ circulus describitur ad eandem distantiam ut 1 ad $\sqrt{1 + \frac{n}{2}}$, corpus in centrum decidet post partem revolutionis quæ est ad totam ut $\frac{1}{2n}$ ad 1. (Vid. Mac. Fl. Art. 437.)

^(f) 145. Si gravitas variatur in minore quam triplicatâ ratione distantiae patet quod si major sit quàm vis centrifuga in superiori parte orbitæ, tardius tamen in accessu ad centrum aucta, minor erit quàm vis centrifuga in inferiori parte orbitæ, et corpus ad priorem distantiam recedet. Si gravitas sit in inversâ triplicatâ ratione distantiae corpus ab apside summâ discedens ad apsidem imam nunquam perveniet. Si gravitas sit in inversâ duplicatâ ratione distantiae, corpus in semiellipsi descendens in dimidiâ revolutione ad apsidem imam perveniet. Si gravitas sit in reciproâ quâdam ratione distantiae, quæ minor est quàm triplicata, major autem quàm duplicata, corpus ad apsidem perveniet post partem revolutionis plusquam dimidiam; vis enim centrifuga difficilius gravitatem superabit. Contra, si gravitas sit in minore quàm duplicatâ ratione distantiae, vis centrifuga citius gravitatem superabit, et corpus ad imam apsidem in minore quàm dimidiâ revolutione descendet. Patet igitur, si gravitas sit in inversâ duplicatâ ratione distantiae, apsidem quiescere, si in maiori quàm in hac ratione, ferri in consequentia, si in minori, in antecedentia, et contra. Unde, apsidibus planetarum motu lentissimo et fere insensibili progredientibus, concludimus virium centripetarum proportionem haud multum aberrare ab inversâ duplicatâ distantiarum.

erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; et propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{1}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3} ; et propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{1}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13} . Denique si corpus pergendo ab apside summa ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, et prætereagradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; et propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripeta quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, et huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illa extranea orietur: et contra (g). Ut si
vis

(g) 146. Vi varianti in inversâ duplicatâ ratione distantiae addatur perpetuo vis in triplicatâ ratione ejusdem distantiae, et summa non variabitur secundum ullam distantiae legem determinatam; quo vero propius accedit orbita ad formam circularem eo propius accedit lex vis compositæ ad legem quandam duplicatam inter et triplicatam distantiae, ita tandem ut in orbitâ propemodum circulari summa revera variabitur secundum determinatam quandam distantiae legem. Auferatur a vi in duplicatâ inversâ variante vis ipsi distantiae pro-

SECTIO
QUINTA.

vis qua corpus revolvitur in ellipfi fit ut $\frac{1}{AA}$, et vis extranea ablata ut cA , ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A \text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, et n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apfides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$.

Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in ellipfi, id est c esse $\frac{100}{357.45}$, existente A vel T æquali 1, et $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{356.45}{353.45}}$,

seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44 f. Igitur corpus de apfide summa discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 f. perveniet ad apsidem imam, et hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis lunæ est duplo velocior circiter (^h).

SECTIO

portionalis, et residuum quoque in orbitâ propemodum circulari secundum determinatam quandam distantiae legem variabitur. Fingatur igitur vim, compositam ex vi crescente in inversâ duplicatâ et vi addititiâ crescente in inversâ triplicatâ, variari in eâdem ratione ac vis, composita ex vi crescente in inversâ duplicatâ et vi ablatitiâ distantiae proportionali, et quoniam motus apsidum ex variatione vis in majori vel minori ratione quam inversâ duplicatâ distantiae pendet, idem erit in utroque casu eorundem motus.

(^h) 147. Inveniantur proportio vis ablatitiæ ad vim addititiam, et earundem quantitates per calculos a Newtoni principiis pendentes; et, subtrahendo summas virium addititiarum a viribus ablatitiis, inveniatur excessus vis ablatitiæ supra vim addititiam; ponatur hunc excessum, sublato motu regressivo, agere per totam orbitam lunarem, et apsidum motus hinc oriundus dimidium erit motus ab astronomis observati. Probavit vero Newtonus hunc motum dimidiatum necessario oriri ex quantitate illâ datâ vis ablatitiæ, et proinde causam motus illius dimidiati recte exponit ex principiis hujusce sectionis; altera vero pars hujusce motus ab excentricitate orbitæ lunaris, motu in tangente variabili, motu ipsius telluris, aliisque causis, de quibus in hac sectione nulla habetur ratio, petenda videtur.

124

SECTIO
QUINTA



SECTIO VI.

SECTIO
SEXTA.*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.*

Haëtenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; et corporum trahentium et attractorum actiones semper mutuæ sunt et æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: et si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, et idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis, centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur: et propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur fermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

§. II. PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXI.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuo, figuras similes.

Sunt enim distantie corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus; atque ideo in data ratione ad invicem, et componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantie circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum.

SECTIO
SEXTA.

rectum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, et æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eodem terminos in planis, quæ una cum his terminis vel quiescunt, vel motu quovis non angulari moventur, describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantis circumactis describuntur ⁽¹⁾. Q. E. D.

58: S: 11.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXII.

Si corpora duo viribus quibuscvis se mutuo trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

TAB. IX.
FIG. 74.

Revolvantur corpora S , P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T , deque P ad Q . A dato puncto s ipsis SP ,

TAB. IX.
FIG. 73.

⁽¹⁾ 148. Projiciantur corpora S , T in contrariis directionibus, ita ut centrum gravitatis C quiescat; et si in dato tempore corpus T ad punctum t perveniat, et agatur tc , erit corpus alterum in lineâ illâ productâ; et distantia ejus Cs erit ad Ct , ut quantitas materiæ corporis T ad quantitatem materiæ corporis S , hoc est, ut CS ad CT , per naturam centri gravitatis; et proinde, ob angulum SCs æqualem angulo TCt , erunt figuræ SCs , TCt , circa commune centrum gravitatis descriptæ, similes. Præterea, corpora S , T describunt etiam circa se mutuo figuras et similes inter se, et similes etiam figuris circa punctum C descriptis: corpus enim T per arcum Tt movens describet circa quiescens S angulum TSt ; moveat interea S per spatium Ss , et describetur præterea angulus æqualis angulo Sts , qui duo anguli simul sumpti æquales sunt externo angulo TCt : eodem modo ostendi potest corpus S describere circa T angulum æqualem angulo SCs : unde, quoniam per naturam centri gravitatis, totæ inter corpora distantia sunt, et inter se, et ad distantias a centro gravitatis C in data ratione, sequitur quatuor illas figuras similes esse.

Projiciantur jam corpora S , T ita ut corpora illa cum centro C quiescente non jaceant in eâdem rectâ, tum movebitur centrum illud uniformiter in directum, et motus corporum inter se iidem erunt ac si centrum illud quiesceret (Cor. 6. leg. mot.); ideoque figuræ similes sunt ut prius.

SP , TQ æquales et parallelæ ducantur semper sp , sq ; et curva pqv , quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s describit, erit similis et æqualis curvis, quas corpora S , P describunt circum se mutuo: proindeque (per theor. XXI.) similis curvis ST et PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : idque quia proportionales linearum SC , CP , et SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C , per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque s et p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S et P similia et æqualia. Dein tangant rectæ PR et pr curvas PQ et pq in P et p , et producantur CQ et sq ad R et r . Et ob similitudinem figurarum $CPRQ$, $sprq$ erit RQ ad rq ut CP ad sp , ideoque in data ratione. Proinde si vis, qua corpus P versus corpus S , atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, qua corpus p versus centrum s attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR , pr ad arcus PQ , pq per intervalla ipsis proportionalia RQ , rq , ideoque vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in curva pqv , quæ similis esset curvæ PQV , in qua vis prior efficit, ut corpus P gyretur; et revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp , sed (ob similitudinem et æqualitatem corporum S et s , P et p , et æqualitatem distantiarum SP , sp) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: et propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicata ratione distantie sp ad distantiam CP , eo ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicata ratione, describantur

SECTIO
SEXTA.

bantur arcus pq , PQ , qui sunt in ratione integra (^k): Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C et s figuras similes PQV , pqv , quarum posterior pqv similis est et æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; et (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, et propterea figuræ pqv similes et æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. IX.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, ellipses concentricas (¹); et vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiae proportionales.

Corol. 2.

* (^k) 149. Si velocitates in P et p fuerint in subduplicatâ ratione CP ad sp , corpora P et p describent arcus similes in temporibus quæ erunt etiam in subduplicatâ illâ ratione; et si velocitates in Q et q fuerint ut \sqrt{CQ} ad \sqrt{sq} vel ob similitudinem arcuum ut \sqrt{CP} ad \sqrt{sp} , corpora P et p pergent arcus similes in temporibus proportionalibus describere. Videamus ergo an velocitates in Q et q sint ad invicem in hac ratione. Anguli CPQ et spq ob similitudinem sitûs corporum P et p in curvis similibus æquantur; ergo vires centripetæ quibus hæc corpora in lineas curvas detorquentur similiter applicantur. Sed vires æquales similiter applicatæ velocitates generant temporibus proportionales; ergo incrementa vel decrementa velocitatum in locis Q et q sunt ut \sqrt{CP} ad \sqrt{sp} . Addantur hæc incrementa vel subducantur decrementa velocitatibus in P et p quæ sunt etiam ut \sqrt{CP} ad \sqrt{sp} , et prodibunt velocitates in Q et q etiam in eadem illâ ratione. Sunt ergo velocitates in locis omnibus similibus ut \sqrt{CP} ad \sqrt{sp} . \sqrt{sp}

TAB. IX.
FIG: 73.

(¹) 150. Describat corpus T lineam Tt ; centrum orbitæ circa S descriptæ erit in ipso corpore S ; describat interea S lineam Ss ; et centra arcuum omnium quàm minimorum, quos corpus T circa S describit, invenientur perpetuo in linea Ss : completâ igitur totâ revolutione, ipsa orbita corporis S locus erit omnium centrorum; et centrum ejus C centrum erit totius orbitæ a corpore T circa S descriptæ. Eodem modo patet, centrum orbitæ quam corpus S circa T describit esse in loco C .

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suae reciproce proportionalibus, describunt (per prop. XIII. XIV. XV.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figurae describuntur. Et vice versa, si tales figurae describuntur, vires centripetae sunt quadrato distantiae reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis et ad centrum illud et ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

7: 8: 11.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXIII.

Corporum duorum S et P, circa commune gravitatis centrum C revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis, et figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem et æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ et pq describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum CP et SP vel sp , hoc est, in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S + P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ et pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figurae totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. Q. E. D.

SECTIO

SEXTA.

60. §. 11.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo S et P, viribus quadrato distantiae suae reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum medie proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum S.

Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, et tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. XVII.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquuplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum medie proportionalium inter S + P et S ad S + P. Et inverse, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primum duorum medie proportionalium inter S + P et S ^(m). Q. E. D.

P R O-

(^m) 151. Cum $T^2 : t^2 :: S + P : S$ per prop. XXXIII; et $T^2 : t^2 :: A^3 : X^3$, (positis nempe A et X pro axibus ellipsium descriptarum) per prop. XVII; erit $S + P : S :: A^3 : X^3$. Sed cum quatuor quantitates geometricè proportionales sint, prima est ad quartam, ut cubus primæ ad cubum secundæ; ergo duobus mediis proportionalibus inter S + P et S sumptis, est S + P ad S ut $\frac{S + P}{S}$ ad cubum primi horum duorum, ideoque S + P ad primum illud ut A ad X.

152. Methodus media dua proportionalia inveniendi hæc sit. Sint E et F rectæ duæ lineæ longitudinis cujuscunque, et a puncto A ducantur lineæ AB et

TAB. IX.
FIG. 75.

61. §. II. PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XXV.

SECTIO
SEXTA.

Si corpora duo viribus quibuscumque se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum a centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut et ratio quantitatis cujusvis, quæ ex una distantia et quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera distantia, et quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, qua corpus unum ab altero trahitur, sit directe vel inverse ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae

et AC ad invicem perpendiculares. Fiat parabola ADG , cujus axis est AB cujusque latus rectum æquatur lineæ E , ducaturque alia parabola ADH , cujus axis est AC cujusque latus rectum lineæ F æqualis est. Hæ parabolæ sese interfecent in puncto D , et demissis perpendicularis DC , DB , est $E : BD :: BD : BA$ (Ham. Con. Sect. L. II. P. i.) et $BD : DC$ vel $BA :: DC$ vel $BA : F$. Ergo E , BD , BA et F sunt quatuor geometricè proportionales.

153. Hinc inveniri possunt diametri principales orbium quos planetæ describunt. Capiendæ sunt enim in ratione subseque multiplicatâ temporum periodorum per prop. XVII, et deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum solis et planetæ cujusque revolvantis ad primum duorum medie proportionalium inter hanc summam et solem.

SECTIO
SEXTA.

distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia et quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverse ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantie hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia et analogis quantitatibus datis similiter derivata. Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantie utriusque (*). Q. E. D.

64: 11.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XI.

Viribus quibus corpora se mutuo trahant crescentibus in simplici ratione distantiarum a centrīs: requirantur motus plurimum corporum inter se (°).

TAB. IX.
FIG. 76.

Ponantur primo corpora duo T et L commune habentia gravitatis centrum D . Describent hæc (per corollarium primum theorematis XXII.) ellipses centra habentes in D .

Trahat

* (°) 154. Moveantur duo corpora S et P circa commune gravitatis centrum C , et nominetur SP , x , et CP , z ; et ponantur corpora S et P æqualia, ita ut sit $x = z$; exponamus denique vim centripetam qua corpus S trahit corpus P per quantitatem aliquam compositam, qualis est $Ax + Bx^2$; habitis A et B pro quantitatibus quibilibet datis, et si exponatur lex $Ax + Bx^2$ per potestates ipsius z evadet $2Ax + 4Bz^2$; vel positis a et b pro $2A$ vel $4B$, lex vis centripetæ ad commune centrum C tendentis fiet $az + bz^2$; et quantitas $az + bz^2$ semper erit æqualis quantitati $Ax + Bx^2$. Statuatur jam corpus aliquod in communi centro C , quod trahat corpus P vi centripetâ $az + bz^2$, corpore S jam destructo; et corpus P jam trahetur ad corpus in centro C constitutum omnino pariter ac prius, tum quoad directionem, tum quoad quantitatem vis centripetæ.

* (°) 155. LEMMA. Si feratur corpus aliquod L circa centrum D cum vi centripetâ quæ sit ut $A \times DL$, tempus periodicum erit reciproci in subduplicatâ ratione quantitatis A . Nam (per Cor. 2. Prop. IX.) tempus periodicum idem erit ac si corpus L circulum describeret circa centrum D ad distantiam quamvis DL : describat ergo; et si tempus periodicum vocetur T , erit $A \times DL$ ut $\frac{DL}{T^2}$ (per Cor. 2. Prop. IV); unde erit T^2 ut $\frac{1}{A}$ et T ut $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Q. E. D.

156. Positis

Trahat jam corpus tertium S priora duo T et L viribus acceleratricibus ST , SL , et ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST (per legum corol. 2.) resolvitur in vires SD , DT ; et vis SL in vires SD , DL . Vires autem DT , DL , quæ sunt ut ipsarum summa TL , atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T et L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T et L , prior priori et posterior posteriori, componunt vires distantis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. IX. et corol. 1. et 8. prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD et SD , actionibus motricibus $SD \times T$ et $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter et secundum lineas TI , LK , ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed

156. Positis quæ in hac prop. trahat corpus unumquodque corpora reliqua cum vi acceleratrice, quæ sit ut corpus trahens et distantia corporum attractorum conjunctim; et exponetur vis qua corpus T trahit corpus L per quantitatem $T \times TL$; cumque sit L ad T ut TD ad DL , erit (*componendo*) $T + L$ ad T ut TL ad DL ; unde $T \times TL$ æqualis erit $T + L \times DL$: trahitur ergo corpus L ad centrum commune D , perinde ac si corpus T tolleretur et aliud corpus $T + L$ in communi centro D immotum constitueretur; et tempus periodicum corporis L circum D erit ad tempus periodicum corporis L circum T immotum, in subduplicatâ ratione corporis T ad summam corporum $T + L$ (155.) Accedat jam corpus tertium S , et vis quâ corpus S trahit corpus T exponetur per $S \times ST$, æqualis viribus $S \times TD + S \times SD$. Similiter vis quâ corpus S trahit corpus L æqualis erit viribus $S \times LD + S \times SD$: quare summa virium, quâ corpus S trahit corpora T et L , est $S \times TD + S \times DL + S \times 2SD$; sed vis $S \times 2SD$ minimè perturbat motum systematis ut demonstrat Newtonus; et vi $T + L \times DL$, quâ corpus L trahebatur ad centrum D ante accessum corporis S , jam additur vis $S \times DL$, ita ut vis tota quâ corpus L trahitur ad centrum D jam sit $S + T + L \times DL$; minuitur ergo tempus periodicum corporum T et L circa commune ipsorum gravitatis centrum D per accessum corporis S in subduplicatâ ratione $S + T + L$ ad $T + L$; et corpus alterutrum, puta L , trahitur ad centrum D perinde ac si corpora S et T submoverentur, et corpus $S + T + L$ in communi centro D collocaretur. Similiter si accedat corpus quartum V , trahetur corpus L ad centrum D perinde ac si corpora V , S , T submoverentur, et corpus $V + S + T + L$ in centro D collocaretur, et tempus periodicum accessu corporis V minuetur in subduplicatâ ratione $V + S + T + L$ ad $S + T + L$.

Hæc

SECTIO
SEXTA.

fed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK ; quam ductam concipe per medium corporis S , et lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus faciendo ut systema corporum T et L ex una parte, et corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . Tali motu corpus S , eo quod summa virium motricium $SD \times T$ et $SD \times L$, distantiae CS proportionalium, tendit versus centrum C , describit ellipsin circa idem C ; et punctum D , ob proportionales CS , CD , describet ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T et L viribus motricibus $SD \times T$ et $SD \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter et secundum lineas parallelas TI et LK , ut dictum est, attracta, pergent (per legum corollarium quintum et sextum) circa centrum mobile D ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V , et simili argumento concludetur hoc et punctum C ellipses circa omnium commune centrum gravitatis,

Hæc sunt phænomena motuum binorum quorumcunque corporum circa commune ipsorum gravitatis centrum. Videamus jam phænomena motuum respectu reliquorum centrorum C et B . Corpus S trahitur ad corpus T vi centripeta $T \times TS$ æquali viribus $\overline{T \times TD} + \overline{T \times SD}$; similiter vis, quâ corpus S trahitur ad corpus L , æquatur viribus $\overline{L \times LD} + \overline{L \times SD}$; quare summa virium quibus corpus trahitur a corporibus T et L , est $\overline{T \times TD} + \overline{L \times LD} + \overline{T + L \times SD}$. Sed vires $\overline{T \times TD}$ et $\overline{L \times LD}$, cum sint æquales et contrariæ, ex naturâ centri gravitatis se mutuo destruunt; manet itaque vis $\overline{T + L \times SD}$ quâ corpus trahitur a corporibus T et L , pariter ac si corpora illa T et L in unum coalescerent, et in communi centro D locarentur. Porro cum sint ex naturâ centri gravitatis S ad $T + L$ ut CD ad CS , et componendo $S + T + L$ ad $T + L$ ut SD ad SC , erit $\overline{T + L \times SD} = \overline{S + T + L \times SC}$; ergo corpus S trahitur ad commune centrum C cum vi $\overline{S + T + L \times SC}$. Accedat rursus corpus quartum V , et vis quâ V trahitur ad S erit $\overline{S \times VS} = \overline{S \times SC} + \overline{S \times VC}$; et vis quâ corpus V trahitur a corporibus T et L erit $\overline{T + L \times CD} + \overline{T + L \times VC}$, uti ante dictum est; quare vis tota qua corpus V trahitur a corporibus S , T , L , est $\overline{S \times SC} + \overline{T + L \times CD} + \overline{S + T + L \times VC}$. Sed vires $\overline{S \times SC}$ et $\overline{T + L \times CD}$ se mutuo destruunt ut prius; quare vis quâ corpus V trahitur a corporibus S , T , L est $\overline{S + T + L \times VC}$: est autem V ad $S + T + L$ ut BC ad VB , et componendo $V + S + T + L$ est ad $S + T + L$

ut

gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T , L et S circa centra D et C , sed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent, etsi corpora T et L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutuae omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiae ductæ in corpora trahentia, et ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B , in plano immobili describunt. Q. E. I.

65. 8. 11. PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXVI.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centrīs, moveri posse inter se in ellipsis; et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsis accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsis accurate, nisi servando

ut VC ad VB : est ergo $\overline{S + T + L} \times VC = \overline{V + S + T + L} \times VB$. Trahitur ergo corpus unumquodque V ad commune omnium centrum B omnino similiter ac si corpus $V + S + T + L$ æquale nempe toti systemati in communi centro B constitueretur; et vires absolutæ ad centra B, C, D , tendentes æquales sunt inter se. Sunt ergo tempora periodica tum corporis uniuscujusque circa centrum B , tum trium quorumcunque circa centrum C , tum duorum quorumcunque circa centrum D æqualia inter se, et ad tempus periodicum corporis L circa centrum immotum T in subduplicatâ ratione corporis T ad totum systema $V + S + T + L$. Trahant jam corpora T et L se mutuo viribus vel majoribus vel minoribus quam quibus trahunt cætera, et tempus periodicum systematis $T + L$ circa centrum D minuetur vel augebitur in subduplicatâ ratione virium auctarum vel diminutarum (155); sed motus reliquorum ex hac virium intensiōe vel remissiōe minime perturbabitur.

SECTIO
SEXTA.

vando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab ellipsis errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolute proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibilibiter ab hoc centro: et maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolvuntur circa hoc maximum in ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, et actiones mutue sint datis quibuscvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsis quadrent, et areae respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. *Q.E.O.*

Cas. 2. Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, et interea vi corporis alterius longe maximi et ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam aequales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inaequalitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; et augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiae respectu earum longitudinis, et inclinationes

clinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibuscumque datis minores. Et quoniam, ob exiguum partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel parabolam attractione languida, ellipsin fortiore) et radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiae, perexiguæ sane et pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q.E.O. (P)

Simili

(P) 157. Sumatur pro hypothese centrum systematis mundani quiescere (quod ab omnibus concessum est, dum aliqui terram, alii solem in centro systematis quiescere contendunt) et videamus quid inde sequatur.

1mò. *Commune gravitatis centrum terræ, solis, et planetarum omnium quiescit.* Nam centrum illud (per legum Cor. 1v.) vel quiescet, vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum mundi movebitur quoque contra hypothesein.

2dò. *Sol motu perpetuo agitur, sed nunquam a communi gravitatis centro planetarum omnium longe recedit.* Nam cum materia in sole (119) sit ad materiam in jove ut 1067 ad 1, et distantia jovis a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo majore [est enim ut 1115 ad 1,] incidet commune centrum gravitatis jovis et solis in punctum paulo supra superficiem solis. Eodem argumento cum materia in sole sit ad materiam in saturno ut 3021 ad 1, et distantia saturni a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo minore, incidet commune gravitatis centrum saturni et solis in punctum paulo infra superficiem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si terra et planetæ omnes ex una solis parte consisterent, commune omnium gravitatis centrum vix integra solis diametro a centro solis distaret. Aliis in casibus, distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longe recedet.

Hinc commune gravitatis centrum terræ, solis et planetarum omnium pro centro mundi habendum est. Nam cum terra, sol, et planetæ omnes gravitent in se mutuo, et propterea pro vi gravitatis suæ secundum leges motus perpetuo agitentur: perspicuum est, quod horum centra mobilia pro mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset soli. Cum autem sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum solis quam minime discedit, et a quo idem adhuc minus discederet, si modo sol densior esset et major, ut minus moveretur.

SECTIO
SEXTA.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus in-

3tiò. *Planetæ moventur in ellipsis umbilicum habentibus in centro solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.* Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera planetarum in solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro solis, si sol quiesceret et planetæ reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum elliptici, solem in umbilico communi habentes, et areæ describerentur temporibus proportionales (per prop. 1, et XIII, et Cor. 1. prop. xv.): actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) et motus planetarum in ellipsis circa solem mobilem minus perturbant, quam si motus illi circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem jovis in saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem est ad gravitatem in solem (paribus distantiiis) ut 1 ad 1067 (1119); ideoque in conjunctione jovis et saturni, quoniam distantia saturni a jove est ad distantiam saturni a sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas saturni in jovem ad gravitatem saturni in solem, ut 81 ad 16×1067 , seu ut 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis saturni in singulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. In his conjunctionibus gravitates acceleratrices solis in saturnum, jovis in saturnum, et jovis in solem, sunt fere ut 16, 81, et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideoque

differentia gravitatum solis in saturnum et jovis in saturnum est ad gravitatem jovis in solem, ut 65 ad 156609, seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima saturni efficacia ad perturbandum jovis motum, et propterea perturbatio orbis jovialis longe minor est quam ea saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores præterquam quòd orbis terræ sensibilibus perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ ac lunæ, ellipsin circa solem in umbilico positum percurrit, et radio ad solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, terra vero circa hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter et secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora et non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione et inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol, 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsis, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter, et secundum lineas parallelas quamproxime.

S: II. PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXVII.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et figuram ad formam ellipseo umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem; si corpus maximum his attractionibus agitetur; quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum, aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione corollarii secundi propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto et latius cogente sic evincitur.

SECTIO
SEXTA.

TAB. IX.
FIG. 77.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P et S in eodem plano circa maximum T , quorum P describat orbem interiores PAB , et S exteriores ESE . Sit SK mediocris distantia corporum P et S ; et corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illa distantia, exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK , et erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantia quavis SP . Junge PT , eique parallelam age LM occurrentem ST in M ; et attractio SL resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones SM , LM . Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T , et oritur a mutua attractione corporum T et P . Hac vi sola corpus P circum corpus T , sive immotum, sive hac attractione agitatatum, describere deberet et areas, radio PT , temporibus proportionales, et ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T . Patet hoc per prop. xiii. et corollaria 2. et 3. theor. xxii. Vis altera est attractionis LM , quæ quoniam tendit a P ad T , superaddita vi priori coincidet cum ipsa, et sic faciet ut areae etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. xxii. At quoniam non est quadrato distantiae PT reciproce proportionalis ⁽¹⁾, componet ea cum vi priore vim ab hac proportionem aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. xiii. et per corol. 2. theor. xxii.) vis, qua ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, et esse quadrato distantiae PT reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportionem, faciet ut orbis PAB aberret a forma ellipseos umbilicum habentis in T ; idque eo magis, quo major est aberratio ab hac proportionem; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam
vero

(¹) 158. Si detur SK mediocris distantia corporum P et S , vis LM erit ut $\frac{PT}{SP^3}$; nam ex constructione $SL : SK :: SK^2 : SP^2$, ideoque $SL \times SK : SK \times SP$ (id est $SL : SP$) :: $SK^3 : SP^3$; fed $SL : SP :: LM : PT$; ergo $LM : PT :: SK^3 : SP^3$, et $LM = \frac{PT \times SK^3}{SP^3}$, id est datâ SK , ut $\frac{PT}{SP^3}$.

vero vis tertia SM , trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a P in T ; quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P , radio TP , areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hac proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigatur a P ad T , tum etiam quod non sit reciproce proportionalis quadrato distantiae PT ⁽¹⁾. Quibus intellectis, manifestum est, quod areae temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; et quod orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam SN ; et si attractiones acceleratrices SM , SN æquales essent; hæc trahendo corpora T et P æqualiter et secundum lineas parallelas nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum corol. vi.) ac si hæc attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM , tolleretur ipsa attractionis SM pars SN , et maneret pars sola MN , qua temporum et arearum proportionalitas et orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM , oriretur ex differentia sola MN perturbatio proportionalitatis et orbitæ ⁽²⁾. Sic
per

(1) 159. Si dentur mediocris distantia SK et distantia ST , erit vis SM ut $\frac{1}{SP^3}$; nam $SM:LM::ST:PT$, unde $SM = \frac{LM \times ST}{PT}$, sed (158) $LM = \frac{PT \times SK^3}{SP^3}$, ergo $SM = \frac{ST \times SK^3}{SP^3}$, id est, datis SK et ST , ut $\frac{1}{SP^3}$.

(2) 160. Linea per quadraturas C , D ducta orbitam PAB bifariam secaret: dum corpus P in eâ orbitæ suæ parte quod corpori S proximum est versetur,

SECTIO
SEXTA.

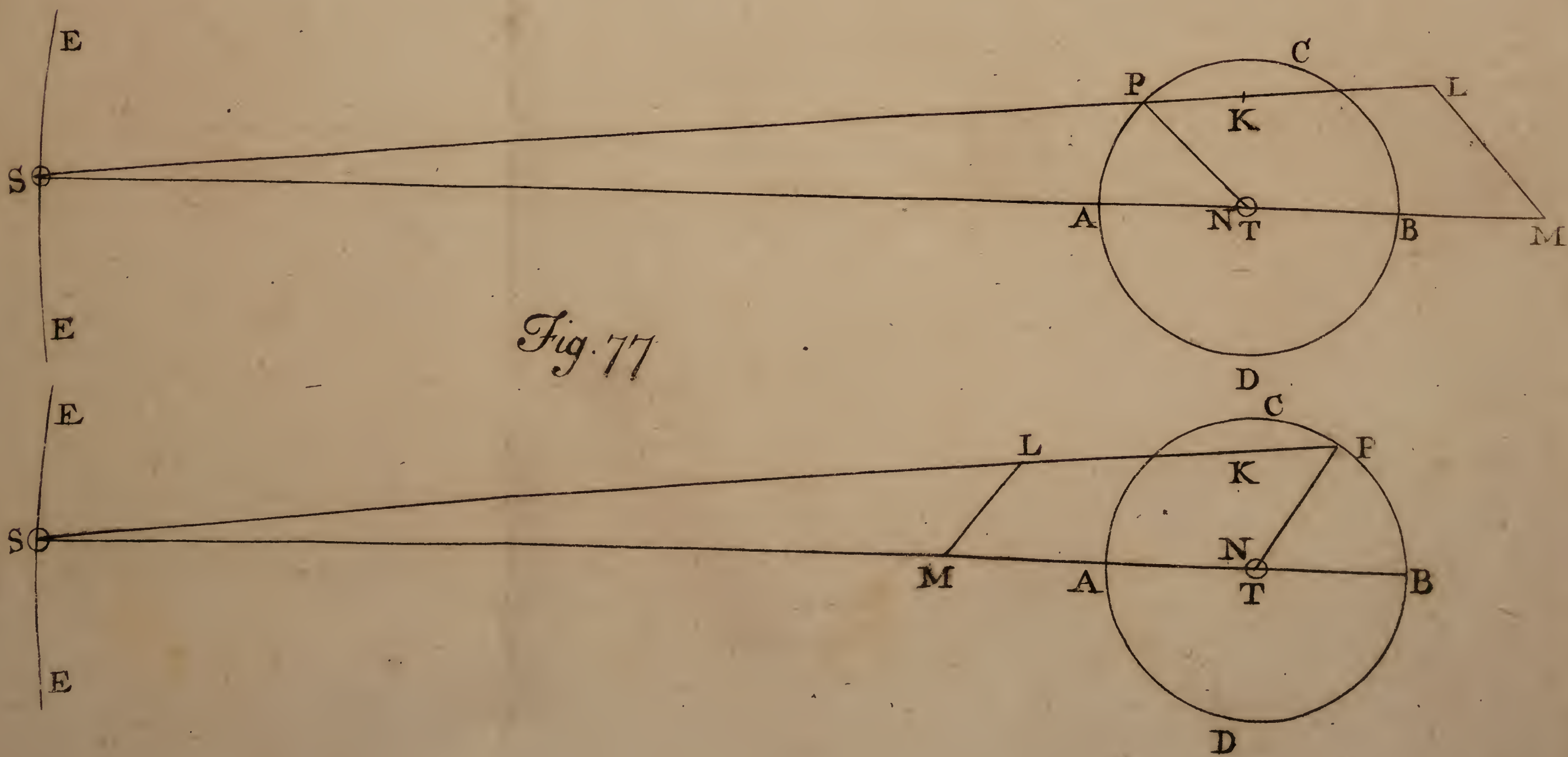
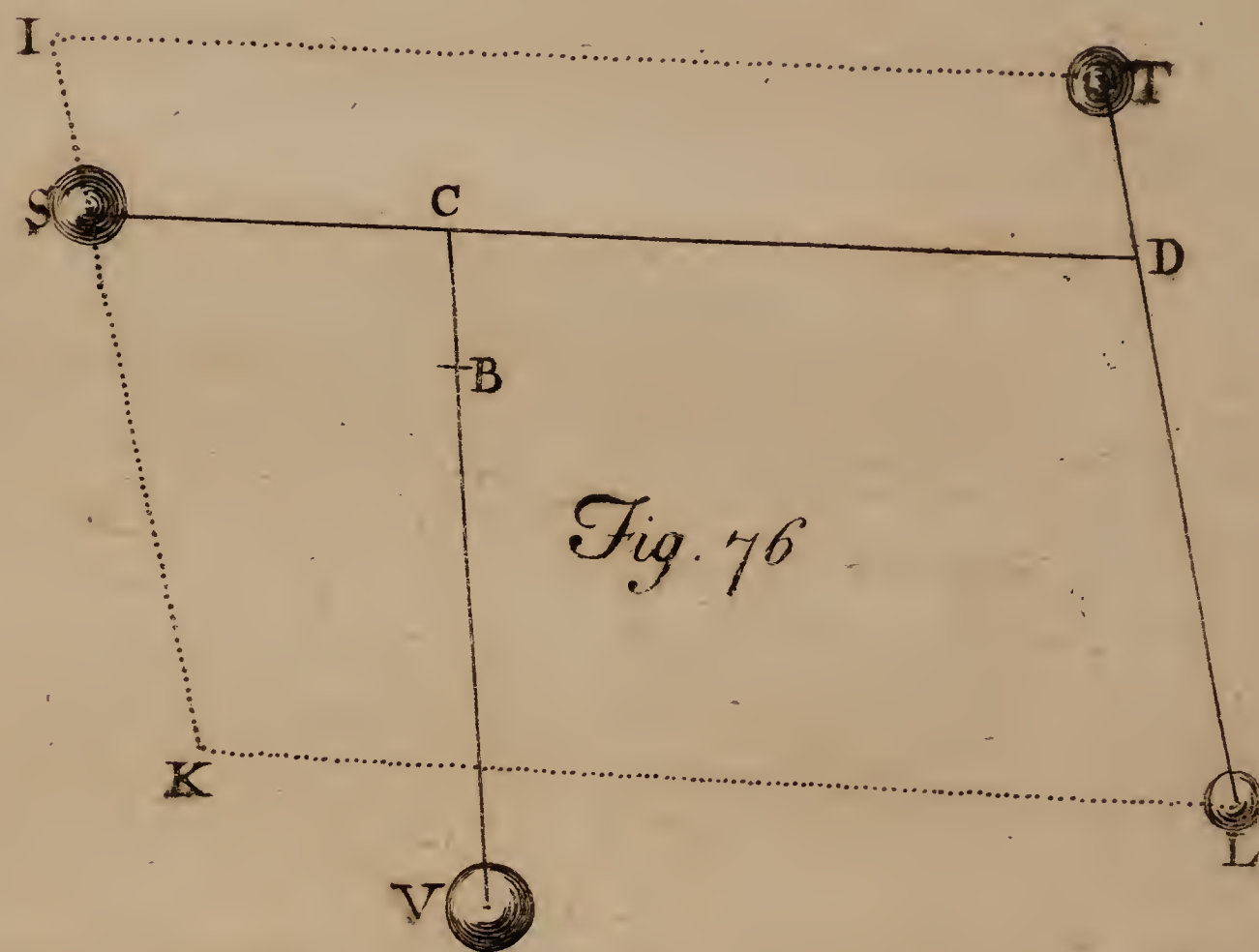
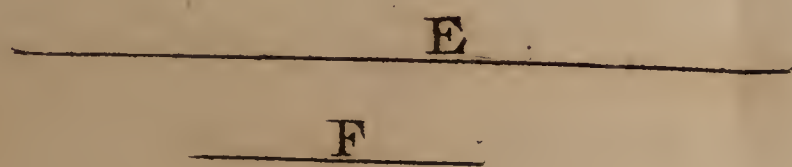
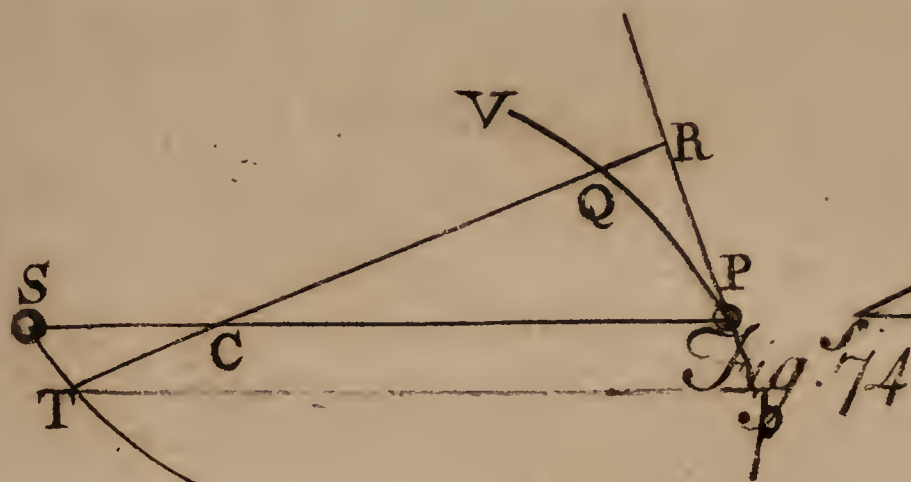
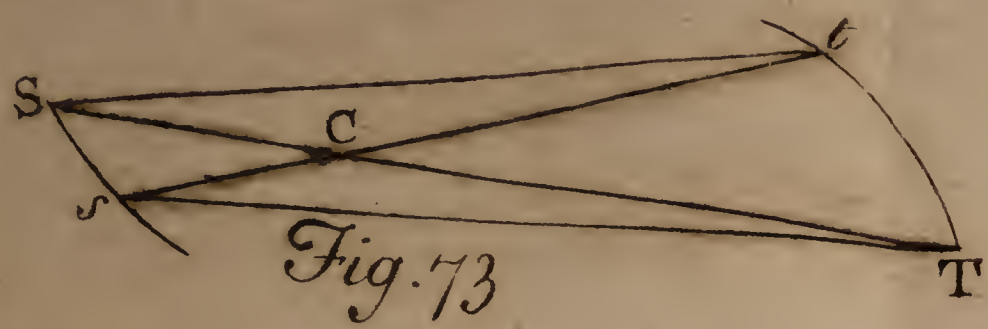
per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN , attractione prima et secunda manentibus prorsus immutatis: et propterea areae ac tempora ad proportionalitatem, et orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P et T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minima attractionum omnium SM , sed inter attractionum omnium SM maximam et minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK . Q.E.D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P , S circa maximum T in planis diversis; et vis LM , agendo secundum lineam PT in plano orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P et T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN , ideoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK . Q.E.D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora P , S , R , &c. revolvantur circa maximum T , motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur et agitur, atque cætera a se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum T , P , S , si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem

versetur, attractio SN minor est quam SM ; in oppositâ parte major est quam SM ; iisque in locis, in quibus SP , SK æquantur, coeuntibus K et L , coeunt quoque SM , SN ; et ibi attractiones SN , SM æquales fiunt.





invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus P , radio PT , aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A et oppositionem B , quam prope quadraturas C, D . Namque vis omnis qua corpus P urgetur et corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam PT , accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis est vis NM . Hæc in transitu corporis P a C ad A tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad D in antecedentia, et motum retardat; tum in consequentia usque ad B , et ultimo in antecedentia transeundo a B ad C (^t).

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P , cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione et oppositione quam in quadraturis (^u).

Corol. 4. Orbita corporis P , cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione et oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis KL , vel NM , in conjunctione et oppositione contraria est vi, qua corpus T trahit corpus P ; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus T (^x).

Corol. 5.

(^t) 161. Vis ablatitia MN in motu corporis a quadratura C ad conjunctionem A , agens in directione Pm ipsi ST parallelâ, faciet ut P ad centrum T non tendat, sed versus plagam in quam fit motus; contra, in motu a conjunctione A ad quadraturam D , faciet ut P tendat in antecedentia: descriptio autem arearum acceleratur, si vires declinant in consequentia; et retardatur, si in antecedentia (20). In oppositâ parte orbitæ vis ablatitia MN trahens T a P versus S , diminuit gravitatem ipsius P versus T , et consideranda est tanquam vis agens in corpus P in contrariâ directione ipsi ST parallelâ; et proinde in transitu a D ad B , faciet ut corpus tendat ad centrum in consequentia, et in transitu a B ad C , ad centrum in antecedentia positum.

(^u) 162. Resolvendo vim ablatitiam Pm in duas vires, quarum una Pn agit in directione ipsius TP , altera nm in directione parallela tangenti, vis nm in transitu a quadraturis ad syzygias, agens in directione quâ movetur corpus, motum ejus accelerat; et in transitu a syzygiis ad quadraturas, agens in contrariâ directione, motum ejus retardat.

(^x) 163. Quò major est vis, et quò minor velocitas, eò major est curvatura; et contra.

TAB. X.
FIG. 78.

SECTIO
SEXTA.

sit $R = \text{rad. curvat.}^a \text{ in } C$,
 $r = \text{rad. curvat. in } A$; tum
 $R = \frac{TA^2}{CT}$, & $r = \frac{TC^2}{TA}$, per 56.

R vero minor est quam r
 nec cor. 4. hujus, ergo

$\frac{TA^2}{CT}$ minor est quam
 $\frac{TC^2}{TA}$

& proinde TA
 TA minor quam TC .

Corol. 5. Unde corpus P , cæteris paribus, longius recedet a corpore T in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione (^v). Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apfides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P , ad apsidem summam appellans, absit longius a corpore T in syzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T , qua corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis LM , ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis KL , et ob magnitudinem vis KL , magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa centripeta (per corol. 2. prop. iv.) in ratione composita ex ratione simplici radii TP directe et ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL ; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius TP , augeri, idque in subduplicata ratione, qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquuplicata, (per corol. vi. prop. iv.) (^z). Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper et minus attractum perpetuo recederet longius a centro T ; et contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S , qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; et tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquuplicata radii, et ratione subduplicata, qua vis illa centripeta corporis centralis T , per incrementum

(^v) 164. Vis LM qua corpus P ad centrum T impellitur maxima est circa quadraturas, minima in syzygiis. Motus vero, qui in corpus P per vim addititiam circa quadraturas imprimitur, faciet ut corpus accedat versus centrum usque ad syzygias: retinet enim corpus motum impressum, usque dum vis ablatitia tollat hunc motum, novumque imprimat in contrariam partem; deinde corpus recedet iterum a syzygiis ad quadraturas.

(^z) 165. Vis acceleratrix est ut vis absoluta directe et quadratum distantiae inverse: quoniam vero vis acceleratrix est ut radius directe et quadratum temporis periodici inverse, (ponendo A pro vi acceleratrici, V pro vi absolutâ, R pro

tum vel decrementum actionis corporis longinqui S , diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam, quod ellipseos a corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur et regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM et vi centripeta, qua corpus T trahit corpus P . Vis prior LM , si augeatur distantia PT , augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, et vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, ideoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiae PT ^(a), et propterea (per corol. 1. prop. xxx.) efficit ut aux, seu apsis summa, regrediatur ^(b). In conjunctione vero et oppositione vis,

qua
pro radio, et P pro tempore periodico) erit $\frac{V}{R^2} = \frac{R}{P^2}$; et $P^2 = \frac{R^3}{V}$; ideoque
$$P = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}}.$$

166. Hinc patet menses lunares hybernos æstivis esse longiores; quoniam enim in tempestate hybernâ tellus in perihelio versatur, magis diminuitur vis gravitatis quâ cum luna ad centrum telluris tendit quam in æstate, et proinde dilatatur orbita lunaris: tempus igitur periodicum lunæ augetur in sesquuplicatâ ratione distantiae auctæ, et in inversâ subduplicatâ vis gravitatis diminutæ.

(^a) 167. Si, crescente distantia, addatur vis, quæ variatur in inversâ duplicatâ ratione distantiae, vi varianti in eadem ratione, summa harum virium decrescet in eadem illâ ratione duplicatâ. Si vero, crescente distantia, addatur vis quæ crescit ut distantia, summa major erit quàm in priori casu; non tanto igitur decremento diminuta, decrescet summa in minori quàm duplicatâ ratione distantiae.

(^b) 168. Vis centrifuga in omni orbitâ variatur inversè ut cubus distantiae (127); si vero corpus descendere incipiat, in quâcunque demum ratione fingatur crescere vis centrifuga, corpus nunquam ascendere incipiet donec ad apsidem perveniat; conatur igitur perpetuè vis centrifuga corpus ad apsidem perducere: quò vero majus est discrimen inter variationem vis centrifugæ et vis gravitatis, eò citius vis centrifuga valebit ad corpus a centro repellendum, vel ad apsidem perducere, si unquam repellere vel ad apsidem perducere potest. Si vis gravitatis sit in inversâ duplicatâ ratione distantiae, vis centrifuga valet ad corpus a centro repellendum postquam angulum graduum 180 descripse-

T

rit:

SECTIO
SENTA.

qua corpus P urgetur in corpus T , differentia est inter vim, qua corpus T trahit corpus P , et vim KL ; et differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantiae PT , decrescit in majore quam duplicata ratione distantiae PT (^c), ideoque (per corol 1. prop. xxx.) efficit ut aux progrediatur (^d). In locis inter syzygias et quadraturas (^e) pendet motus augis ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL , transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus et præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum T , P corporibus pluribus S , S , S , &c, in orbe ESE consistentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiae.

Corol. 8.

rit: si vis gravitatis sit in minori ratione, citius prævalebit vis centrifuga, et corpus ad apsidem perveniet in minori quàm dimidiâ revolutione. (Vid. 145.)

(^c) 169. Vis, composita ex vi ablatitiâ quæ variatur directè ut distantia, et vi gravitatis quæ variatur inversè in ratione illâ duplicatâ, decrescente distantia, plus augetur quàm si vis ablatitia esset inversè ut quadratum distantiae; vis enim ablatitia quæ variatur inversè ut quadratum distantiae magis augetur, decrescendo distantia, quàm si vis illa esset directè ut distantia; et contra.

(^d) 170. Si vis centripeta sit in majori quàm in inversâ duplicata ratione distantiae, vis centrifuga in descensu ad centrum difficilius gravitatem superabit, nec valebit ad corpus a centro repellendum nisi post partem revolutionis plusquam dimidiam; progrediuntur igitur apsides in plagam eandem quâ movetur corpus. (Vid. 145.)

(^e) 171. LEMMA. Sint $a \pm b$ et a duæ quantitates, quarum differentia b quàm minima est respectu quantitatum; erit $2ab \pm b^2$, differentia quadratorum harum quantitatum, ad a^2 , ut $2b$, differentia bis sumpta, ad a . Nam $2ab : a^2 :: 2b : a$, et $2ab \pm b^2 = 2ab$ quamproximè, per hypothesin; unde $2ab \pm bb : a^2 :: 2b : a$.

TAB. X.
FIG. 79.

172. Si distantia mediocris SK ingens fuerit respectu radii TP , lineæ SL SM pro parallelis haberi possunt, et NM vel $TM = PL$. Sed ex constructione $SL : SK :: SK^2 : SP^2$, ideoque $SL : KL :: SK^2 : SK^2 - SP^2$; sed per lemma $SK^2 : SK^2 - SP^2 :: SK$ vel $SL : 2PK$ quamproximè, quare $KL = 2PK$, et NM vel $PL = 3PK$.

173. Si igitur vis LM sit ut PT , ML est ad NM ut sinus totus ad triplum sinum distantiae angularis corporis P a quadraturâ proximâ.

Corol. 8. Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ factò in majori vel minori quam duplicata ratione distantiae TP , in transitu corporis ab apside ima ad apsidem summam; ut et a simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summa ad vim in apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM . Ob diuturnitatem vero temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato distantiae suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in ellipti; et mox, in descensu ab apside summa seu auge ad apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiae diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interioriorem, et in apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab apside ima ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem et sic orbis ex-

174. Cum vero LM seu vis addititia est ubique ut radius PT , est vis ablatitia in syzygiis ad vim addititiam in quadraturis ut $3PT - PT$ ad PT , seu ut 2 ad 1; nam in syzygiis $3PK = 3PT$.

175. Si quærat locus inter quadraturas et syzygias in quo vis ablatitia et vis addititia sunt æquales, fiat $Pm = 3PK$, et resolvatur hæc in duas mn et Pn , quarum Pn sit radio PT æqualis: erit, (ob similia triangula Pmn , TPK), Pm ceu $3PK : Pn$ ceu $PT :: PT : PK$; quare $3PK^2 = PT^2$, et $PT : PK :: \sqrt{3} : 1$, ceu ut 1732 ad 1000; in quo casu angulus $PTC = 35^\circ 26'$ circiter.

SECTIO
SEXTA.

centricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi et decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; et contra, diminuetur eadem, si ratio illa decreascit (^f). Jam vero in systemate corporum T, P, S , ubi apfides orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, et maxima fit ubi apfides sunt in

(^f) 176. Fingamus vim addi quæ variatur ut distantia a centro, summa variabitur in minori quam duplicata ratione distantiae (167), corpusque ad distantiam suam minimam vel apsidem perveniet, priusquam angulum 180 graduum confecerit (168); si fingatur vis addititia variari inverse ut distantiae quadratum, corpus ad apsidem perveniet, postquam angulum graduum 180 descripserit; quoniam vero tempora perveniendi ad apsidem in utroque casu æqualia sunt, viriumque centripetarum summa in posteriori casu major est quam in priori, constat eorundem effectum in apsidibus imis, vel effectum in æqualibus temporibus productum, majorem esse quando virium centripetarum summa major evadat; hoc est, distantia a foco in apside ima minor erit si vis addititia crescat ut distantiae quadratum inverse, quam si in directa ratione distantiae crescere ponatur. Describatur ellipsis, cujus distantia maxima est distantia corporis in orbita ab apside summa, et minima, distantia ab apside ima, quando vis addititia ut distantia crescit, ut inveniatur orbitæ mobilis forma; et patebit excentricitatem hujusce ellipseos minorem esse excentricitate illius, quæ describitur vi crescente in inversâ duplicatâ ratione distantiae.

Addatur vis, quæ variatur in majori quam inversâ duplicata ratione distantiae, corpusque angulum majorem angulo graduum 180 describet, et ad minorem distantiam descendet, priusquam ad apsidem vis centrifuga perducere potis sit, ob summam virium centripetarum in hoc casu majorem (170). Capiatur ut prius distantia ab apside summa, et distantia ab apside imâ, et his distantiiis describatur ellipsis, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas hujusce ellipseos major erit quam prioris.

Auferatur vis crescens in ratione plusquam duplicata distantiae, residuum variabitur in minori quam inversâ duplicata; vel vis, si corpus descendere incipiat, minor erit quam si subtrahatur vis, quæ est inverse ut quadratum distantiae; et proinde corpus ad apsidem perveniet angulo 180 gr. nondum descripto. Et distantia ejus ab apside major erit quam si subtraheretur vis crescens in duplicata ratione distantiae. Describatur igitur ellipsis, cujus distantia maxima est distantia corporis in orbitâ ab apside summa, et minima, distantia ab apside imâ, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas minor erit quam in orbita, quæ describeretur si vis ablatitia in ratione duplicatâ distantiae crevisset.

Sit vis ablatitia in minore quam duplicata ratione distantiae inversâ, vel ut ipsa distantia crescat, et residuum erit majus quam in casu priori, et in ratione majori variabitur; corpusque hâc vi agitatum orbitam describens, cujus apfides in consequentiâ feruntur, propius accedet ad centrum, priusquam illud vis centrifuga

in syzygiis (^g). Si apfides constituentur in quadraturis, ratio prope apfides minor est et prope syzygias major quam duplicata distantiarum, et ex ratione illa majori oritur augis motus directus uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter apfides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside ima est ad vim in apside summa

trifuga ad apsidem perducere potis sit. Describatur ut prius ellipsis distantis ab apsidibus pro maximâ et minimâ distantia, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas hujusce ellipseos major erit quam in casu priori.

Attamen notandum est, nos non comparare orbitam, quæ vi addititiâ vel ablatitiâ describetur, cum orbitâ quæ describeretur nulla vi addititia vel ablatitiâ agente: solummodo vero comparamus orbitam, quæ describitur vi addititia vel ablatitia variantibus in minori quam duplicata ratione inversâ, cum orbitis quæ viribus addititiis vel ablatitiis, in ratione duplicata vel plusquam duplicata inversâ crescentibus, describerentur; et ex præmissis consequitur, excentricitatis mutationem eo esse majorem vel minorem, quo magis vel minus vires ablatitiæ et addititiæ summam vel residuum virium centripetarum ab inversa duplicata ratione distantiae recedere cogant. Si enim excentricitas orbitæ, quæ describitur vi ablatitia varianti ut distantia, major sit quam si vis illa ablatitia foret in inversa duplicata ratione distantiae; patet, quo magis vis ablatitia vim centripetam ab inversâ duplicata ratione distantiae recedere cogat, eo majorem esse excentricitatis variationem; vel ut Newtoni verba usurpemus, si ratio incrementi et decrementi singulis revolutionibus augeatur, augebitur excentricitas; et contra, diminuetur eadem, si ratio illa decreseat.

(^g) 177. Quandocunque apfides in quadraturis constituuntur, lex vis centripetæ ab inversâ duplicatâ ratione distantiae minus deflectit, quam in alio quocunque eorum situ. Attamen quamvis in hoc casu vis centripeta in majori quam inversâ duplicatâ ratione distantiae augeatur in descensu corporis ab apside summa ad apsidem imam, et exinde sequatur apfides etiam nunc, motu scilicet lentissimo, progredi debere (170), atque excentricitatem majorem fieri quam si vis in ipsâ duplicatâ ratione variaretur; constat tamen, vim centripetam minus ab hac lege deflectere in hoc apsidum situ, quam in alio quolibet; ideoque (quoniam excentricitas ex variatione vis pendeat per not. 176) excentricitatem magis magisque augeri prout apfides a quadraturis recedunt. Hæc a Newtono sic demonstrari videntur. Patet in cor. VII. vim KL in syzygiis quasi duplo majorem esse vi LM in quadraturis, ideoque excessum earum virium semper esse versus vim KL , residuumque vis centripetæ et hujusce excessus, in transitu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, esse in majori quam inversâ duplicata ratione distantiae. Quum igitur vis centripeta ab inversâ duplicata ratione in ullo apsidum situ deflectit, ostendendum est, eam minus in hoc apsidum situ ab eâ lege deflectere, quam in ullo alio; subtrahamus sigillatim vires addititias a viribus ablatitiis in
diversis.

SECTIO
SEXTA.

summa in minore quam duplicata ratione distantiae apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico: et contra, ubi apsidæ constituuntur in syzygiis, vis in apside ima est ad vim in apside summa in maiore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, et vires KL in syzygiis subductæ a viribus corporis T relinquunt vires in ratione maiore. Est igitur ratio decrementi et incrementi totius, in transitu inter apsidæ, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: et propterea in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias perpetuo augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, et excentricitatem diminuit.

Corol. 10. (^h) Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; et ex errorum
exposita

diversis revolutionibus, et patet differentiam earum esse minimam in eâ revolutione, in qua vires additivæ maximæ evadunt viresque ablativæ minimæ; et satis quoque constat, deflectionem vis centripetæ a ratione duplicata esse in eâ revolutione minimam. Vires autem additivæ tum sunt maximæ, cum in semi-revolutione ab apside summâ ad apsidem imam vis ab inversâ duplicatâ ratione distantiae longissime recedit, *i. e.* in apsidum quadraturis; ibi enim, si in hoc transitu consideretur ratio totius incrementi vel decrementi, a vi centripetâ et vi additiva oriunda, minor ea evadit quam in inversâ duplicatâ ratione distantiae; aberratio tamen ab eâ ratione major erit, quo distantiarum inæqualitas fit major. Similiter si in eodem transitu consideretur ratio incrementi, a vi centripetâ et vi ablativâ oriunda, hæc major evadit quam in inversâ duplicatâ ratione distantiarum; atque aberratio ab eâ ratione nunc quæque major erit, quo distantiarum inæqualitas fit major. His præmissis facile constat, quoniam vires additivæ maximæ sunt, viresque ablativæ minimæ, quando apsidæ in quadraturis locantur, differentiam earum in hoc situ, ob causas utrasque, minimam esse; eandemque differentiam maximam esse, quando apsidæ in syzygiis constituentur, quoniam ibi vires additivæ maximæ sunt, vires vero ablativæ minimæ; constat præterea rationem incrementi vel decrementi vis centripetæ augeri perpetuo, in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias, et in transitu a syzygiis ad quadraturas diminui.

(^h) 178. Orbitam PAB linea nodorum in duos semicirculos dirimit, quorum uterque binas habet facies, alteras plano EST inclinatas, alteras reclinatas; et quanquam vis MN agit semper secundum rectas plano EST parallelas, dicemus tamen in sequentibus agere eam *ad* planum vel *a* plano EST , prout
ab

exposita causa manifestum est, quod ex viribus NM , ML , quæ sunt causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum orbis PAB , nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis NM , ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in quadraturis, eos maxime perturbat, corpusque P de plano orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu ⁽ⁱ⁾ corporis a quadraturis ad syzygias, augetque vicissim eandem in transitu

ab *inclinatâ* vel *reclinatâ* facie immediate dirigatur. Dicemus etiam motum corporis P fieri *ad* planum vel *a* plano EST , prout corpus illud ad nodum proximum, vel a nodo proximo tendit. His præmissis effata quædam proferemus, quibus ad corollaria 10 et 11 aditus amplissimus pateat, quæ alias vix aut ne vix quidem intelligi possunt.

Reg. 1. Si vis MN et motus corporis P ejusdem fuerint affectionis, *b. e.* si fiat uterque *ad* planum vel *a* plano EST , inclinatio orbitæ PAB ceu angulus inclinationis perpetuo augebitur, alias minuetur. Ex. gratia. Si corpus P , in linea AT descendens *ad* planum ETe , vel in lineâ TA ascendens *a* plano ETe , trahatur vi Aa vel Tt , quæ *ad* planum vel *a* plano dirigatur, completo parallelogrammo $AatT$ diagonalis At vel Ta magis inclinatur versus planum ETe , quam AT ; id est, angulus ABe vel aTe major est quam ATe , ceu angulus inclinationis augetur. Si autem corpus, in lineâ AT descendens *ad* planum vel in lineâ TA ascendens *a* plano, trahatur vi Aa vel Tt , angulus ABe in primo casu minor est quam ATe , et in secundo aTe minor quam ATe , ceu angulus inclinationis minuitur.

TAB. X.
FIG. 80, 81.

FIG. 82, 83.

Reg. 2. Vis MN et motus corporis P ejusdem sunt affectionis in locis orbitæ PAB oppositis, et propterea quicquid præstant in uno semicirculo idem præstabunt in altero; patet per not. 161.

Reg. 3. Linea quadraturarum fertur in consequentia eadem velocitate cum lineâ syzygiarum, idque sive motus iste motui corporis S circum T vel T circum S debeat.

Reg. 4. Inter quadraturas et nodum proximum vis MN agit *a* plano EST aliis in locis *ad* planum: — nam inter quadraturas et nodum proximum *a reclinata* facie dirigatur, aliis in locis *ab inclinata*.

Reg. 5. Si vis MN agat *ad* planum EST nodi regrediuntur, alias progrediuntur; ideoque per reg. 4. inter quadraturas et nodum proximum nodi progrediuntur, aliis autem in locis regrediuntur.

(i) 179. In transitu a quadraturis ad syzygias vis MN agit *ad* planum EST , corpus autem P *a* plano movetur, ideoque per reg. 1. angulus inclinationis minuitur; in transitu vero a syzygiis ad quadraturas, vis MN et motus corporis ejusdem sunt affectionis, ideoque angulus inclinationis augetur.

SECTIO
SEXTA.

transitu a syzygiis ad quadraturas (^k). Unde fit ut corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At si nodi constituentur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C* et *A*, *D* et *B*, intelligetur ex modo expositis, quod, in transitu corporis *P* a nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, (¹) inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, et postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, et propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt in octantibus alteris inter *A* et *D*, *B* et *C*. Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima (^m). In transitu eorum a syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos ap-

(^k) 180. Hinc patet, longitudes heliocentricas planetarum in æqualibus a nodis distantis non semper easdem manere, si ratio illarum habeatur in diversis revolutionibus ejusdem planetæ. Nam, ob actionem cæterorum, unusquisque planeta in limitibus suis modo proprius accedit ad eclipticam, modo longius a plano illo recedit.

(¹) 181. Per hos 90° minuitur inclinatio quoniam vis *MN* agit *ad* planum, corpus autem *a* plano movetur (per reg. 1); sed per proximos 45° augetur, quoniam vis et motus ejusdem sunt affectionis; ac denuo in transitu per alios 45° minuitur, quoniam motus corporis *P* est *ad* planum, vis vero *MN* agit *a* plano.

(^m) 182. Si consideratur effectus planetæ cujusvis, motum aliorum in latitudinem perturbantis, patet, distantiam planorum in limitibus planetæ, cujus motus perturbatur, minimam fore, quando ipse planeta, sol, et planeta perturbans, in syzygiis suis, nodique in quadraturis versantur. Idem etiam de sole, motum lunæ in latitudinem perturbante, intelligendum est. Motus vero non omnino perturbabitur, si planeta perturbans in plano motus planetæ inferioris versetur: hoc est, si nodi in syzygiis constituentur: eritque in hoc casu, si lunæ motus consideretur, heliocentrica latitudo, cæteris paribus, maxima. Quoniam vero, ob diversum planetarum situm, alii alios ad planum eclipticæ attrahunt, dum alii illos a plano recedere cogant, eorundem effectus maximos, in systemate plurium corporum, non nisi calculo prælongo determinare licet.

appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, et corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat; nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus P , ubi nodi sunt in quadraturis, perpetuo trahitur de plano orbis sui, idque in partem versus S in transitu suo a nodo C per conjunctionem A ad nodum D ; et in contrariam partem in transitu a nodo D per oppositionem B ad nodum C : manifestum est, quod in motu suo a nodo C corpus perpetuo recedit ab orbis sui plano primo CD , usque dum perventum est ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longissime distans a plano illo primo CD , transit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D , sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S , quodque proinde novus est nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent nodi recedere in transitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuo recedunt; in syzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius: ideoque, semper vel retrogradi, vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia (ⁿ).

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulo majores in conjunctione corporum P , S , quam in eorum oppo-

(ⁿ) 183. Si nodi constituentur in quadraturis, vis MN trahens corpus P perpetuò de plano orbis sui CD versus planum orbis EST , faciet ut P citius perveniat ad planum EST , quàm si tali vi non omnino agitur; transibit igitur per planum illud in nodo quod vergit in antecedentia nodi prioris D ; et simili argumento recedent perpetuò nodi in oppositâ parte orbitæ (178. Reg. 25). Si constituentur nodi in octantibus inter C et B , D et A , regredientur per gradus 135 in transitu a C ad nodum proximum; deinde in transitu per gradus 45 a nodo ad quadraturam D progredientur; similiter in oppositâ parte orbitæ regredientur perpetuò in transitu ipsius P per gradus 135, progredientur vero in transitu per alios 45: et excessu regressus super progressum singulis revolutionibus ferentur in antecedentia. Si nodi sint in ipsis syzygiis, vis MN agens in plano orbis CAD , nullos inducet errores in latitudinem; et nodi per totam revolutionem quiescent, nisi quatenus declinant ab hoc situ ob motum corporis S circum T , vel T circum S : deinde recedent singulis revolutionibus, tardius quidem prope syzygias, velocius vero prope quadraturas.

octantibus

SECTIO
SEXTA.

oppositione; idque ob majores vires generantes NM et ML (°).

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a magnitudine corporis S , obtinent præcedentia omnia, ubi corporis S tanta statuitur magnitudo, ut circa ipsum revolvatur corporum duorum T et P systema. Et ex aucto corpore S , auctaque ideo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis P oriuntur evadent errores illi omnes, paribus distantiiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum systema corporum P et T revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires NM , ML , ubi corpus S longinquum est, sint quamproxime ut vis SK et ratio PT ad ST conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis S vis absoluta, ut ST cub. reciproce; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum et effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum T et P systemate, et mutatis tantum distantia ST et vi absoluta corporis S , sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis S , et ratione triplicata inversa distantiae ST . Unde si systema corporum T et P revolvatur circa corpus longinquum S ; vires illæ NM , ML , et earum effectus erunt (per corol. 2. et 6. prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ NM , ML , et earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S e corpore T spectati, et vice versa (P).

Nam-

(°) 184. Si orbita PAB circularis sit vel circulari finitimus, vis LM in conjunctione est ad vim eandem in oppositione in ratione triplicatâ distantiarum SP inversè. Nam (158) vis LM est ut $\frac{PT}{SP^3}$; id est, datâ PT , ut $\frac{1}{SP^3}$.

185. Vis MN in conjunctione est ad MN in oppositione, ut SB ad SA ; in conjunctione enim $SM:ST::ST^2:SA^2$, ideoque MT vel $MN:ST::ST^2-SA^2:SA^2$ id est (171) $::2AT:SA$; in oppositione vero $ST:SM::SB^2:ST^2$, ideoque $ST:TM$ vel $MN::SB^2:SB^2-ST^2$ id est (171) ut $SB:2TB$; quare conjunctis rationibus MN in priori casu, est ad MN in posteriori, ut $2AT \times SB$, ad $2TB \times SA$, id est, ut $SB:SA$.

* (P) 186. Quo melius intelligantur ea quæ in hoc corollario tradita sunt, longitudines LM , MN , quibus vires omnes perturbatrices corporis P exponuntur,

Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus orbium *ESE* et *PAB* forma proportionibus et inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, et si corporum *S* et *T* vel maneant, vel mutantur vires

ponuntur, primo sunt investigandæ. Nam si detur distantia *ST*, accipi potest longitudo *SK* æqualis ipsi *ST*; quo in casu erit etiam *LM* in mediocri suâ quantitate æqualis distantie *PT*; sin augeatur distantia *ST*, necesse erit ut minuaturs longitudo *SK*; adeoque neque longitudes *SK*, *ST*, neque longitudes *LM*, *PT* amplius pro æqualibus habendæ sunt, sed eruenda est longitudo *LM* ex similibus triangulis *SLM*, *SP²T* per sequentem analogiam, nempe $SP : PT :: SL : LM$, ideoque $LM = \frac{SL \times PT}{SP}$. Verum quoniam *SL* nunc major est, nunc minor quam *SK*, et ab eadem *SK* nunquam aberrat sensibilibiter, exponatur *SL* per mediocrem suam quantitatem *SK*, et similiter *SP* per *ST*, et prodibit longitudo $LM = \frac{SK \times PT}{ST}$.

Jam vero ut exquiramus longitudinem *MN*, jungatur *KN*, et ad rectam *ST* perpendiculares ducantur *LX*, *PI*, et si orbita *PAB* circularis sit, vel prope modum circularis, æquales erunt *SK*, *SN*, et anguli *SKN*, *SNK* tantum non erunt recti propter angulum ad *S* tantum non evanescentem: quare rectæ *KN* et *LX* pro parallelis habendæ sunt, ut et rectæ *KL*, *NX* pro æqualibus et parallelis: sed et rectæ *SP*, *SI* erunt etiam æquales ob angulum ad *I* rectum; quare cum sit $SK : SL :: SP^2 : ST^2$, erit etiam $SK : SL :: SI^2 : ST^2 :: SI : SI + 2IT$, et dividendo $SK : KL :: SI : 2IT$; prodit ergo *KL* vel $NX = \frac{SK \times 2IT}{SI} = \frac{SK \times 2IT}{ST}$. Rursus, propter similia triangula *SLM* et *SP²T*, *LMX* et *PTI*, erit $MX : IT :: LM : PT :: SL : SP$; quare MX æquatur $\frac{SL \times IT}{SP} = \frac{SK \times IT}{ST}$; quare longitudo *MN* seu *MX* + *XN* erit $\frac{SK \times 3IT}{ST}$. Et universaliter *LM* erit ad *MN*, ut radius ad triplum cosinus anguli *PTS*; et in dato situ corporum *S*, *T*, *P*, ad invicem, ubi est $3IT$ ut *PT*, ob datum specie triangulum *PTI*, erit *MN* ut $SK \times \frac{PT}{ST}$; quare vis *LM* universaliter, et vis *MN* in integrâ revolutione corporis *P* circum *T*, est ut $SK \times \frac{PT}{ST}$.

His expeditis, sit *V* vis absoluta attractiva corporis *S*; et *SK* erit ut $\frac{V}{ST^2}$, ergo $SK \times \frac{PT}{ST}$, seu vires *LM*, *MN* erunt ut $V \times \frac{PT}{ST^3}$; unde in dato systemate

SECTIO
SEXTA.

vires in data quavis ratione; hæ vires (hoc est, vis corporis T , qua corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, et vis corporis S , qua corpus idem P de orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo, et eadem proportionem: necesse est ut similes et proportionales sint effectus omnes, et proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, et errorum linearum similium vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica (⁹).

Corol.

corporum P, T , erunt vires LM, MN ut $\frac{V}{ST^3}$. Sit jam T tempus periodicum corporis T circum S , et per corol. 2. et 6. Prop. 4. erit $\frac{V}{ST^2}$ ut $\frac{ST}{T^2}$, et $\frac{V}{ST^3}$ ut $\frac{1}{T^2}$; ergo in dato systemate corporum P, T , vires LM, MN sunt reciproce ut quadratum temporis periodici systematis circum S revolventis. Postremo, sit D diameter corporis S , et diameter ejus apparens ex centro T spectata erit ut $\frac{D}{ST}$, et cubus diametri apparentis ut $\frac{D^3}{ST^3}$. Sunt V et D^3 semper proportionales, hoc est, magnitudo corporis S et vis absoluta attractiva vel maneant vel mutantur proportionaliter, eritque $\frac{V}{ST^3}$ ut $\frac{D^3}{ST^3}$; hoc est, vires LM, MN erunt ut cubus diametri apparentis corporis S ex centro T spectatæ.

* (⁹) 187. Sit V vis attractiva corporis S , v vis attractiva corporis T , D diameter orbitæ corporis T circum S revolventis, d diameter orbitæ PAB , T tempus periodicum corporis T circum S , t tempus periodicum corporis P circum T , et per Cor. 2. Prop. 4. erit $\frac{D}{T^2}$ ut V , et $\frac{D}{V}$ ut T^2 ; unde erit $T^2 : t^2 ::$

$\frac{D}{V} : \frac{d}{v} :: Dv : Vd$, hoc est, T^2 erit ad t^2 in ratione compositâ ex ratione D ad d et ratione v ad V . Manente orbium proportionem mutantur eorum magnitudines, et vel maneant vel mutantur proportionaliter vires V et v , et propter servatas rationes componentes inter D et d , et v et V , servabitur ratio composita inter T^2 et t^2 , eritque T ad t in eadem ratione quâ prius. Tangat jam recta PR orbitam PAB in loco P ; et in loco proximo Q age QR distantia PT parallelam, et quo tempore corpus P sola vi insita percurreret tangentem PR , vel addita vi v percurreret arcum quam minimum PQ , eodem tempore idem P totis viribus LM, MN et v percurrat arcum Px , et lineola Qx erit effectus virium LM, MN .

Manentibus

Corol. 16. Unde, si dentur orbium forma et inclinatio ad invicem, et mutantur utcunque corporum magnitudines, vires et distantiae; ex datis erroribus et errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores et errorum tempora in alio quovis, quam proxime (^r): sed brevius hac methodo. Vires NM , ML , cæteris

Manentibus orbium formâ, proportionem, et inclinationem ad invicem, mutantur eorum magnitudines, ut et magnitudo arcus PQ in eadem ratione, et vires V et v vel maneant, vel mutantur etiam in datâ aliquâ ratione. Detur postremo situs tum orbitalium ad invicem, tum corporum S , T , P , in his orbitis, atque ob datum et situ et specie triangulum $SP T$, et datam rationem virium, lineola Qx semper erit similiter sita quoad hoc triangulum. Erunt etiam in hoc casu vires LM , MN ut vis v , et lineola Qx ut lineola simul genita QR , et errores omnes ex lineolâ Qx oriundi, ut Qx vel QR , vel ut diametri orbitalium; atque adeo reddentur proportionales. Denique ob datam rationem inter arcum PQ et totam orbitæ PAB perimetrum, tempus quo generatur Qx erit ut tempus periodicum corporis P circum T , vel corporis T circum S . Sunt itaque errores similes lineares ut orbitalium diametri, et propterea errores angulares ex centro T spectati æquales; et errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora sunt ut tempora periodica.

* (^r) 188. Sit T tempus periodicum telluris nostræ circa solem, t tempus periodicum lunæ circa centrum telluris, R tempus periodicum jovis circa solem, r tempus periodicum satellitis alicujus circum-jovialis circa centrum jovis, et propositum sit errores omnes satellitis ex analogis erroribus lunaribus ope *Corol.* 14. et 15. derivare.

Manentibus orbita et tempore periodico satellitis, deturbetur *Jupiter* de loco suo, et statuatur ad distantiam a sole, quæ sit ad distantiam satellitis a centro jovis, ut distantia terræ nostræ a sole ad distantiam lunæ a centro terræ.

Sit S tempus periodicum jovis circa solem ad hanc distantiam revolventis, eritque per *Corol.* 15. $r : S :: t : T$; unde $\frac{r}{S} = \frac{t}{T}$, et $\frac{rr}{SS} = \frac{tt}{TT}$. Jam vero ex *Corol.* 15. manifestum est errores omnes in motu satellitis tempore r commissos, æquales esse erroribus similibus in motu lunæ commissis tempore t . Referat itaque $\frac{tt}{TT}$ quantitates errorum periodicorum lunarium, et huic æqua-

lis $\frac{rr}{SS}$ exhibebit errores analogos æquales in motu satellitis. Restituatur jam *Jupiter* in locum proprium, et per *Corol.* 14. mutabuntur quantitates errorum in reciproca duplicatâ ratione temporis periodici jovis circa solem, hoc est, in ratione $\frac{1}{SS}$ ad $\frac{1}{RR}$: quare $\frac{rr}{RR}$ jam exponet quantitates errorum satellitis, hoc est, errores periodici satellitis erunt ad errores analogos lunares ut $\frac{rr}{RR}$ ad $\frac{tt}{TT}$.

SECTIO
SEXTA.

teris stantibus, sunt ut radius TP ^(s), et harum effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires et quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P ; et hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus augis et nodorum, quam omnes in longitudinem et latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis P , ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Coniungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv. et in quolibet corporum T, P, S systemate, ubi P circum T sibi propinquum, et T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P , de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P , ut quadratum temporis periodici corporis P directe et quadratum temporis periodici corporis T inverse. Et inde motus medius augis erit in data ratione ad motum medium nodorum; et motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directe et quadratum temporis periodici corporis T inverse ^(t). Augendo vel minuendo excentricitatem et inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis et nodorum sensibilibiter, nisi ubi eadem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major sit nunc minor quam radius PT , exponatur vis mediocris LM per radium illum PT ; et erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST . Est autem vis mediocris SN vel ST , qua corpus T retinetur in orbe suo
circum

* ^(s) 189. Nam vires LM, MN sunt ut $\frac{SK \times PT}{ST}$, sed si detur ST , dabitur

SK ob datam vim absolutam corporis S , quo in casu dabitur $\frac{SK}{ST}$, et vires LM, MN erunt ut PT .

* ^(t) 190. Motus periodici sunt qui spatio unius revolutionis peraguntur, adeoque sunt ut motus contemporanei et tempora periodica conjunctim; unde fit ut motus contemporanei sint ut motus periodici directe, et tempora periodica inverse. Sed motus periodici sunt ut $\frac{t}{T}$, ergo motus contemporanei erunt

ut $\frac{t}{T}$.

circum S , ad vim, qua corpus P retinetur in orbe suo circum T , in ratione composita ex ratione radii ST ad radium PT , et ratione duplicata temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S . Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, qua corpus P retinetur in orbe suo circum T (quave corpus idem P , eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam PT revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum ^(u). Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia PT , datur vis mediocris LM ; et ea data, datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PT , MN . ^(v)

Corol.

^(u) 191. Sit V vis attractiva corporis S , v vis attractiva corporis T ; sit T tempus periodicum corporis T circum S ; t tempus periodicum corporis P circum T ; et erit vis mediocris $LM:V::PT:ST$; sed $V:v::\frac{ST}{T^2}:\frac{PT}{t^2}$; unde

est vis mediocris $LM:v::\frac{PT \times ST}{TT}:\frac{PT \times ST}{tt}::\frac{1}{TT}:\frac{1}{tt}::tt:TT$.

^(v) 192. THEOREMA. *Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.* Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, et minores illos in ellipsis, umbilicos in centrīs majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. xxxvii. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficiuntur inæqualitatibus quæ in luna nostra notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, et 5. hujusce prop.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram in syzygiis quam in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, et minima ubi idem in quadraturis consistit; et inde luna in perigæo velocior est et nobis propior, in apogæo autem tardior et remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, et regrediuntur nodi, sed motu inæquali. Et apogæum quidem (per corol. 7. et 8.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, et excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 11.) quiescunt in syzygiis suis, et velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed et major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10.) quam in syzygiis: et motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6.) quam in ipsius aphelio. Atque hæc sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt

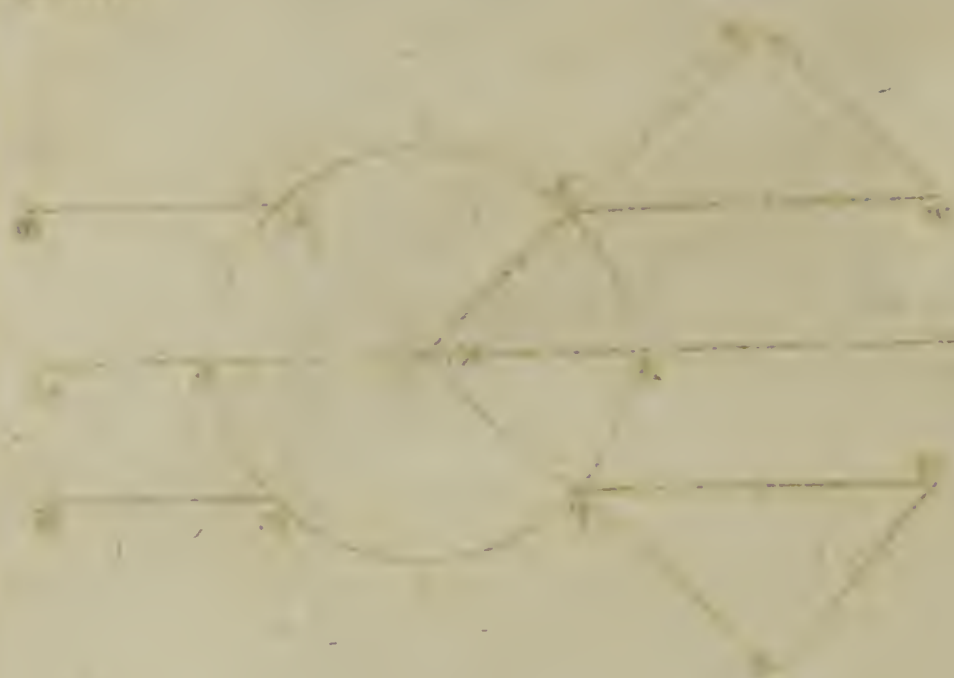
SECTIO
SEXTA.

Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; et singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis

Sunt etiam aliæ quædam a prioribus astronomis non observatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hætenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi et nodorum lunæ, et eorundem æquationes, ut et differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis et minimam in quadraturis, et inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14.) in triplicata ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per corol. 1, et 2. lem. x. et corol. 16. hujusce prop.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, et cum ea confundi.

193. PROBLEMA. *Motus inæquales satellitum jovis et saturni a motibus lunaribus derivare.* Ex motibus lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici terræ circa solem ad tempus periodicum jovis circa solem, et ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16.); ideoque annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24'. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) et inde dantur. Motus autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) et inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat (Vid. Cor. 8.). Æquationes maximæ nodorum et augis satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas nodorum et augis lunæ respectivæ, ut motus nodorum et augis satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum et apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum (Vid. Cor. 16.). Variatio satellitis e jove spectati, est ad variationem lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles et luna ad solem revolvuntur, per idem corollarium; ideoque in satellite extimo non superat 5". 12".

194. Hætenus satellitum motus descripsimus respectu ad plana quæ circa solem cum primariis suis deferuntur. Adjiciantur pauca de proprietatibus semitæ, quam satelles motu composito ex motu ejus circa primarium et primarii circa solem in plano immobili describit; posito quod motus satellitis circa primarium, et primarii circa solem fiant uniformiter in circulis in eodem plano jacentibus.



poris P peragendo, propius accedent ad corpus T , et celerius movebuntur in conjunctione et oppositione ipsarum et corporis S , quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T , quiescent in syzygiis; extra syzygias vero movebuntur in antecedentia, et velocissime quidem

jacentibus. Sit S sol, Aa orbita primarii, et $L \propto L$ orbita satellitis circa primarium descripta; centro S et radio SL , cum satelles L sit in conjunctione, describatur arcus circuli Ll ; et si linea Ll æqualis sit peripheriæ orbitæ satellitis, et tempus synodicæ revolutionis satellitis, vel tempus quod labitur inter duas conjunctiones proximas, sit æquale tempori quo describit primarius lineam Aa , quæ est ad peripheriam orbitæ satellitis ut SA ad SL , patet semitam satellitis esse epicycloidem, a puncto quovis in peripheria circuli $L \propto$ descriptam, interea dum circulus ille $L \propto$ super basim circularem Ll revolvitur. Quod si tempus synodicæ revolutionis satellitis non tale sit, erit semita ejus epicyclois quædam descripta a puncto L in plano circuli cujusdam dati, interea dum circulus ille super alium quendam circularem basim revolvitur, cujus proprietates a ~~fig-~~ sequentibus theorematis innotescunt.

TAB. XI.
FIG. 85.

sequentibus

195. THEOREMA. I. *Diameter circularis basis SE est ad diametrum circuli revolvantis EA , ut tempus periodicum primarii circa solem, ad tempus synodicum satellitis circa primarium.*

TAB. XI.
FIG. 86.

DEM. Sit enim T tempus periodicum primarii circa solem, et t tempus synodicum satellitis circa primarium, hoc est, tempus quod, ob motum compositum satellitis circa primarium et primarii circa solem, labitur inter duas proximas conjunctiones: sit S sol, Aa orbita primarii circa solem, CL orbita mobilis satellitis L circa primarium A ; et centris S et A describantur circuli EeZ , EMF tales, ut dum circulus EMF super EeZ revolvatur, centro ejus movente cum velocitate quam habet primarius in orbitâ suâ, punctum L in plano circuli revolvantis veram describat semitam satellitis in plano immobili: describat jam primarius arcum Aa , et sumatur $er = EM$, et $mr = eE$; et satelles L describet interea arcum rm æqualem arcui Ee : est igitur angulus ram , quem satelles circa primarium revera describit, ad angulum ESe vel ASa , quem primarius circa solem interea describit, ob æquales arcus subtendentes, inversè ut radius ar , vel AE , ad ES : tempora vero T et t sunt inversè ut angulares velocitates; ergo erit $T : t :: ES : EA$. Q. E. D.

196. Cor. 1. Hinc sequitur esse $AS : AE :: T + t : t$, hoc est, ut tempus periodicum primarii ad tempus periodicum satellitis.

197. Cor. 2. Quoniam circulus EMF circa punctum E revolvatur, erit directio tangentis, in quâ movetur perpetuò satelles, ipsi EL perpendicularis: et velocitas satellitis ad uniformem velocitatem primarii, ut EL ad EA .

198. THEOREMA .II. *Capiatur AB ipsis AS et AE tertia proportionalis; super EB describatur semicirculus BKE, occurrens lineæ EL in K; et producat LE ad punctum O, ita ut LK sit ad LE, ut LE ad LO, erit LO radius osculi ad punctum semitæ L.*

X

DEM.

SECTIO
SEXTA.

quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, et axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol.

DEM. Quoniam LE et le perpendiculares sint semitæ in L et l , et productæ occurrant in O , ultima earum intersectio centrum erit curvaturæ. Ducatur qe , quæ producta occurrat LE in V , et jungatur VS ; patet angulum $SeV = qea = LEA = SEV$, ideoque angulum $eVE = eSE$, et $EVS = EeS$; ergo SV est ultimo ad EV perpendicularis, et $EV : EK :: ES : EB :: AS : AE$; ultimo autem angulus EOe est ad angulum EVe (seu ESe) ut EV ad EO ; hoc est, ut $EV \times AE$ (seu $EK \times AS$) ut ad $EO \times AE$. Motus angulares linearum LE et EA in statu nascenti æquantur, ideoque angulus $LEl = AEa$. Ultimo angulus EOe est ad angulum LEl ut LE ad LO , et LEl (ceu AEa): $ESe :: AS : AE$, ergo est $EOe : ESe :: AS \times LE : AE \times LO$. Sed ex præmissis $EOe : ESe :: EK \times AS : EO \times AE$; ergo $EK \times AS : EO \times AE :: AS \times LE : AE \times LO$, unde $EK : EO :: LE : LO$, ideoque $LO : LE :: LE : LK$ convertendo et dividendo. Q. E. D.

199. *Cor. 1.* Si AB major sit quam AC , LK et LO ad eandem puncti L partem jacebunt, ideoque semita Ll erit ubique versus S concava. Si $AB = AC$, tum in conjunctione evanescit curvatura; et semita punctum rectitudinis habet. Sin AB minor sit quam AC , circulis CLD et BKE sese jam intersectantibus, portio quædam semitæ, quæ prope conjunctionem est, convexa erit versus S ; atque intersectionum loca puncta erunt contrariæ flexuræ.

200. *Cor. 2.* Ex hypothefi $AE : AS :: p : P$ (positis p et P pro temporibus periodicis satellitis et primarii) ergo $AB : AS :: p^2 : P^2$. In casu lunæ nostræ $p^2 : P^2 :: 1 : 178$, et $AB = \frac{1}{178} \times AS$; sed $AC = \frac{1}{337} \times AS$ quamproximè, ideoque cum AB major sit quam AC , orbita lunaris est ubique versus solem concava.

201. THEOREMA. III. *Isdem positis, exprimatur gravitas primarii versus solem per BA ; et vis, quâ retinetur satelles in semitâ super planum immobile descriptâ, exprimetur per LB , et tendet ad punctum B .*

Dem. Componi enim intelligatur vis illa a duabus aliis, quarum una agit in directione LO ad semitam perpendiculari, altera vero in directione tangentis semitæ: et quoniam vires, quibus corpora in curvas quascunque deflectuntur, sunt ut quadrata velocitatum directè, et ut chordæ illæ curvaturæ quæ per centra virium transeunt inversè (42), erit vis prior, quæ agit in directione ad semitam perpendiculari ad vim gravitatis primarii versus solem, ut $\frac{EL^2}{LO}$ ad $\frac{EA^2}{AS}$, hoc est, ut LK ad AB (198): gravitate igitur primarii dictâ AB , vis prior

tellit

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T , ex materia non fluida constantem, ampliari et extendi usque ad hunc annulum, et alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus et retardatus (ut in superiore corollario) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi,

fatellitis recte exprimitur per LK . Vis altera quæ in satellitem in directione tangentis agit, atque accelerat vel retardat motum ejus, est ut incrementum velocitatis directè, et ut incrementum temporis inversè; incrementum temporis est ut incrementum spatii directè, et ut velocitas inversè, *i. e.* ut $\frac{Aa}{EA} = \frac{Ee}{EB} = \frac{rm}{EB}$

$= \frac{lq \times AE}{EB \times AC} =$ (si an et qu sint perpendiculares ad en et el in n et u , et proinde

$lq:lu::ac:an::AC:AN) = \frac{AE \times lu}{EB \times AN} = \frac{lu}{BK}$: est autem lu incremen-

tum velocitatis; et proinde est vis ut lu directè, et ut $\frac{lu}{BK}$ inversè, hoc est,

directe ut BK . Quoniam igitur vis in directione LO agens exprimitur per LK , et vis altera in directione tangentis per BK , vis ex his composita recte exprimitur per LB , et a puncto L ad punctum B tendet. Q. E. D.

202. *Cor.* 1. Si LH sit æqualis et parallela AB , et si compleatur parallelogrammum $LABH$, vis LK componi potest ex viribus LH et LA , quarum una LH parallela est et æqualis ipsi AB , quæ exprimit gravitatem primarii versus solem, altera vero LA ad primarium tendit, et æqualis est gravitati quâ fatelles circum circa primarium suum describeret in eodem tempore periodico p , si nulla esset actio solis; est enim gravitas illa ad AB gravitatem primarii circa solem, ut $\frac{AL}{AE^2}$ ad $\frac{AS}{AS^2}$, vel ut AL ad $\frac{AE^2}{AS} = AB$.

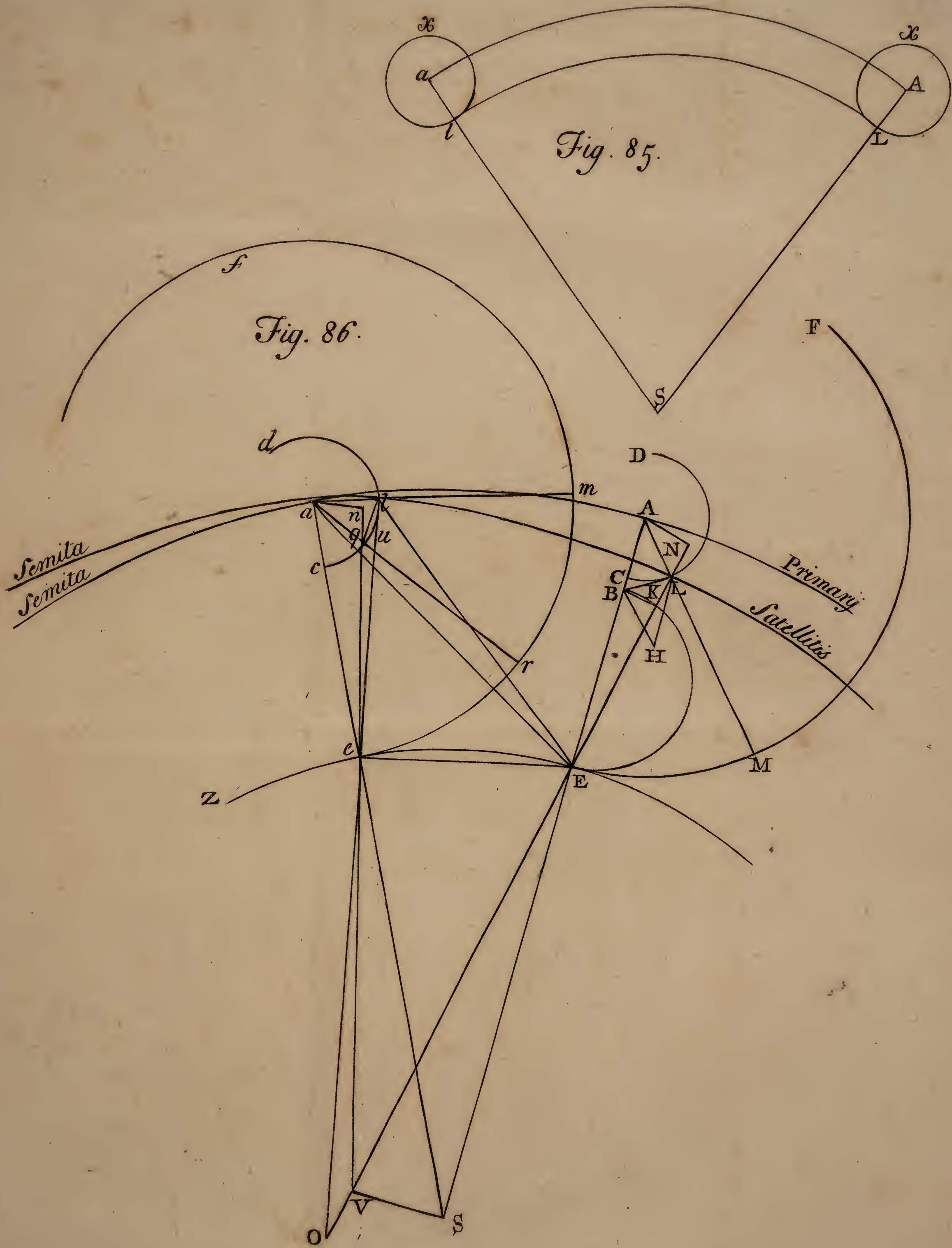
203. *Cor.* 2. Hinc sequitur, omnem vim perturbatricem solis in satellitem oriri, vel ex inæqualitate actionis ejus in satellitem et primarium, vel ex obliquitate directionis: nam si fatelles trahatur versus solem vi LB æquali et parallelâ vi AB , quâ agitur primarius, revolvit circa primarium cum vi AL eodem modo, ac si primarius quiesceret, et actio solis tolleretur.

204. *Cor.* 3. Quoniam in casu lunæ AB semper major est quàm AC , luna in conjunctione plus attrahitur versus solem quàm versus tellurem; non tamen ob hanc causam relinquit tellurem; nam velocitas ejus absoluta multò major est quàm quæ sufficit ut corpus describat circum, si agitur a vi quæ est differentia inter vires AB , AC ; luna igitur recedet a sole donec perventum est ad oppositionem, et postea agitata summâ virium AB , AC , accedet versus conjunctionem: et sic orbita lunaris respectu ad solem, duas habet apsidēs in singulis revolutionibus ejus circa terram.

SECTIO
SEXTA.

globi, et sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S , nullum acquireret motum fluxus et refluxus. Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, et interea revolvantis circa centrum suum (per legum corol. v.) ut et globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus S , et ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem LM trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; et vis KL trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus, et faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi et refluendi ab alveo aquæ dirigatur, et per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, et minuatur globus, cessabit motus fluendi et refluendi; sed oscillatorius ille inclinationis motus et præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroque compleat iisdem temporibus, et superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; et participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur, et nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbatu maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, et isto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione maximus decrefcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, et minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reclamationis motus in syzygiis, et maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris



1785

1785

2

æquatoris regionibus excessus (*). Et quanquam, aucta utcunque globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus et præcedentis corollarii vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur et permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis *LM* trahit aquam deorsum maxime in quadraturis,

(*) 205. Hinc facile colligitur puncta æquinoctialia regredi ob actiones solis atque lunæ conjunctim. Ponamus enim planetam prope superficiem telluris revolvi in orbita quæ ad orbitam, in quâ revolvitur tellus ipsa, inclinatur; tum, sole vel lunâ in æquatore existentibus, vis tota perturbatrix agit in plano æquatoris, nullamque mutationem inclinationis vel nodorum motum producet. In locis vero quæ nonaginta gradus a punctis æquinoctialibus distant, in tropicis scilicet, vis illa perturbatrix efficiet ut nodi regrediantur, motu vero minori ob diminutam planetæ distantiam. Idem eveniet si numerus planetarum ita augeatur, ut solidus ex his conflatus annulus terræ adhereat; velocitas vero regressionis minor erit ob quantitatem materiæ motum illum participantis; et regressionis motus adhuc minor erit, si tellus, altior quidem juxta æquatorem quam apud polos, formæ sit spheroidicæ, ob diffusam annuli materiam per superficiem totam telluris. Quoniam igitur neque sol neque luna in plano æquatoris moventur, patet, puncta æquinoctialia ob eorundem actiones regredi debere, et exinde annum tropicalem fidereo esse minorem: ob causas vero supra memoratas, constabit nodorum motum fore lentissimum. Hicce vero motus, calculo prælongo investigatus, motui ab astronomis deprehenso (qui talis est ut puncta æquinoctialia totam revolutionem in annis 25000 peragerent) accurate respondet.

206. Majorem diametrum telluris per æquatorem transire, minorem vero per polos, colligi potest ex rotatione ejus diurnâ; ob vim enim centrifugam ex motu illo oriundam, nisi terra paulo altior esset sub æquatorem quam apud polos, maria apud polos subsiderent, et juxta æquatorem ascendendo ibi omnia inundarent.

207. Ex proportionem vis centrifugæ ad vim gravitatis computum ineundo invenit Newtonus, diametrum terræ apud æquatorem esse ad ipsius diametrum per polos, ut 230 ad 229: quod, comparatione diversarum longitudinum pendulorum in diversis latitudinibus minuta secunda oscillantium inventum, observationibus astronomorum recentioribus mire convenire videmus.

208. Eodem argumento, si constitutio jovis eadem sit ac nostræ telluris, colligere licet, majorem adhuc inæqualitatem in diametris jovis inveniri debere, ob motum ejus diurnum spatio hor. 9. confectum; ita ut non mirum est, si ea sit diametrorum jovis differentia quæ observationibus astronomicis comprobatur.

SECTIO
SEXTA.

ris, et vis KL feu $NM—LM$ trahit eandem sursum maxime in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum et incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, et minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulo diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulo citius sistatur. (^y)

Corol. 21.

(^y) 209. *Fluxum et refluxum maris ab actionibus solis ac lunæ oriri.* Mare singulis diebus tam lunaribus quam solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per corol. 19. et 20. prop. XXXVIII. ut et aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis et liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* et *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* et promontorium *Bonæ Spei*, ut et in maris *Pacifici* littore *Chilensi* et *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus, ab oceano profundo per loca vadosa propagatus, usque ad horam quintam, sextam, septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam supra, et per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis solis vel lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu, et per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit; id quod fiet spatio horæ unius duarumve, sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadofum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, et componetur fluxus et refluxus maximus. In quadraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; et ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias et quadraturas, æstus maximus qui sola vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, et sola solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideoque in transitu lunæ a syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem; idque maximo in-

Corol. 21. Eadem ratione, qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur, et per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, et motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem et perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque

intervallo paulo post octantes lunæ; et paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ a quadraturis ad syzygias.

Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀμύν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantis a terra. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium (per cor. 14). Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, et in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; et luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantia ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione et remissione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, et propterea minores ciebut æstus in syzygiis solstitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebut æstus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias et minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam solis a terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi et minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quam sequantur, et sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE*

SECTIO
SEXTA.

cunque oblique in superficiem suam facto propelli, et motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam globus oblique, in eadem illa superficie parte, qua prius, impulsu quocunque novo; et cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est, quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum corol. 2.) composita impulsus fuisset, atque ideo simplicem,

AE æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subiectum; *b* locum huic oppositum; *K, k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH, Cb* maris altitudines maximas mensuratas a centro telluris: et *CK, Ck* altitudines minimas: et si axibus *Hb, Kk* describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hb* describatur sphærois *HPKbpk*; designabit hæc figuram maris quam proxime, et erunt *CF, Cf, CD, Cd* altitudines maris in locis, *F, f, D, d*. Quinetiam si in præfata ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff, Dd* in locis quibusvis *R, T*, et æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omnibus *R, S, T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum lunæ; et affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum in hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Kbk*; quos igitur fluctum borealem et fluctum australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, et australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores et minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur et occidunt. Æstus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem, et luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet

simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut et impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem ac si simul et semel in locum in-

det in tempora solstitiorum; præsertim si lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis. Sic experientia compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos et vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* et *Sturmio*.

Motus autem hætenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; et æstus proxime post syzygias majores reddit, eosque proxime post quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* et *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam et fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab oceano per freta diversa ad eundem portum, et citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce suo ad meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, et sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores et minores, uti dictum est; et inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores et bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major et minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, et inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem et semel ad minimam; et altitudo maxima, si luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum

SECTIO
SEXTA.

interfectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneous et perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit et ad unum reducit, et quatenus in se est, gyratur semper motu simplici et uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem
axis,

omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali $20^{\text{gr}}. 50'$. *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere et refluere, non bis, ut in aliis portibus, sed semel singulis diebus; et æstus incidit in occasum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; et luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum lunæ et affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ad oceano *Sinenfi* inter continentem et insulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem et insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a mari *Indico* et spatio horarum sex a mari *Sinenfi* per freta illa venientes, et sic in horam tertiam et nonam lunarem incidentes, componant huiusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

210. Commodus hic nobis præbetur locus explicandi transitum a binis æstibus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares fitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundum Theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim in zonis temperatis et torridâ quotidie duo fluxus observantur, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea a binario ad unitatem maxime mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia si fluxus bini successivi inter se sunt inæquales, refluxus aquæ seu maxima depressio fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstus intelligamus motum aquæ a summa elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quo magis itaque ab æquatore versus polos recedatur, eo major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cum ratione magnitudinis tum temporis, major enim diutius durabit quam minor, ambo vero simul ubique absolventur tempore 12 horarum cum $24'$ circiter: quod si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescit, solusque major supererit, qui tempus 12° , $24'$ adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuo fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cum evenit, bini æstus in unum coalescunt.

axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum et centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, et propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum et æquatorem materia nova in formam montis cumulata, et hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, et circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. xxi.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per corol. xx.) nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, et hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons et hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propriiores.

7. §. 11.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales et orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum et maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

TAB. XII.
FIG. 88.

Nam corporis S attractiones versus T et P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T et P commune gravitatis centrum O, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiae SO magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiae ST: ut rem perpendenti facile constabit.

SECTIO
SEXTA.

68: §:11. PROPOSITIO XL. THEOREMA XXIX.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S , circa interiorum P et T commune gravitatis centrum O , radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.

Demonstratur eodem fere modo cum prop. xxxviii. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, et quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex una parte, et commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. Liquet hoc per corollarium secundum propositionis xxxii. collatum cum demonstratis in prop. xxxvi et xxxvii. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, et augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum et maximum T lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis T , moveri incipit, et magis deinceps magisque agitur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellip-

ellipticas, et arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directæ et quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, et orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ in centro gravitatis corporis maximi et intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; et sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat et statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

Descripsimus jam systema solis, terræ, lunæ, et planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA XIII.

Cometas esse luna superiores et in regione planetarum versari.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic ex parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra est inter ipsos et solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos et solem; et justo tardiores vel retrogradi, si terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, et motu angulari circa solem tanto celerius fertur, ut recta per terram et cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e terra spectatus ob motum suum tardiozem apparet esse retro-

SECTIO
SEXTA.

TAB. XII.
FIG. 89.

trogradus; si terra tardius fertur, motus cometæ (detraçto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunt rQA , rQB , rQC observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, fitque rQF longitudo ultimo observata, ubi cometa videri definit. Agatur recta ABC , cujus partes AB , BC rectis QA et QB , QB et QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producat AC ad G , ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam et ultimam ad tempus inter observationem primam et secundam, et jungatur QG . Et si cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta uniformi cum motu progredere; foret angulus rQG longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur FQG , qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, si terra et cometa in contrarias partes moventur, additur angulo rQG , et sic motum apparentem cometæ velociorem reddit: si cometa pergit in easdem partes cum terra, eidem subducitur, motumque cometæ vel tardiores reddit, vel forte retrogradum; uti modo exposui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu terræ, et idcirco pro parallaxi cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit. Distantia vero cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S solem, acT orbem magnum, a locum terræ in observatione prima, c locum terræ in observatione tertia, T locum terræ in observatione ultima, et Tv lineam rectam versus principium arietis ductam. Sumatur angulus rTV æqualis angulo rQF , hoc est, æqualis longitudini cometæ ubi terra versatur in T . Jungatur ac , et producat ea ad g , ut sit ag ad ac ut AG ad AC , et erit g locus quem terra tempore observationis ultimæ, motu in recta ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur g r ipsi Tv parallela, et capiatur angulus rgV angulo rQG æqualis, erit hic angulus rgV æqualis longitudini

TAB. XII.
FIG. 89, 90.

co-

cometæ e loco g spectati; et angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur a translatione terræ de loco g in locum T : ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic autem locus V orbe *Jovis* inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, et quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod respondet motui terræ; et insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra jovem. Unde consequens est quod in perigæis et periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbem martis et inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitem. Nam corporis cœlestis a sole illustrati et in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiae: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a sole, et in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur et lucis quantitas et apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe et ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata et micrometro mensurata, æquabat $2'. 0''$; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum $11''$ vel $12''$; Luce vero et claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: et quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, et diameter apparens globi sit quasi $21''$, ideoque lux globi et annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset $30''$:
erit

SECTIO
SEXTA.

erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, et 12" ad 30" directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, et cum stellis primæ magnitudinis conferabatur. Latitudo capillitii erat quasi 6', at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat jove, et nunc minor corpore intermedio saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro superet 8' vel 12', diameter vero nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hæc ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quod cometæ omnes in periheliis vel infra saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cælo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur a tellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maxime copiosum et crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto proprius ad solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit cometas longe infra sphæram saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Hæc vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate et expansione propageatur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari et intra discum nuclei coarctari, nucleus ille
jam

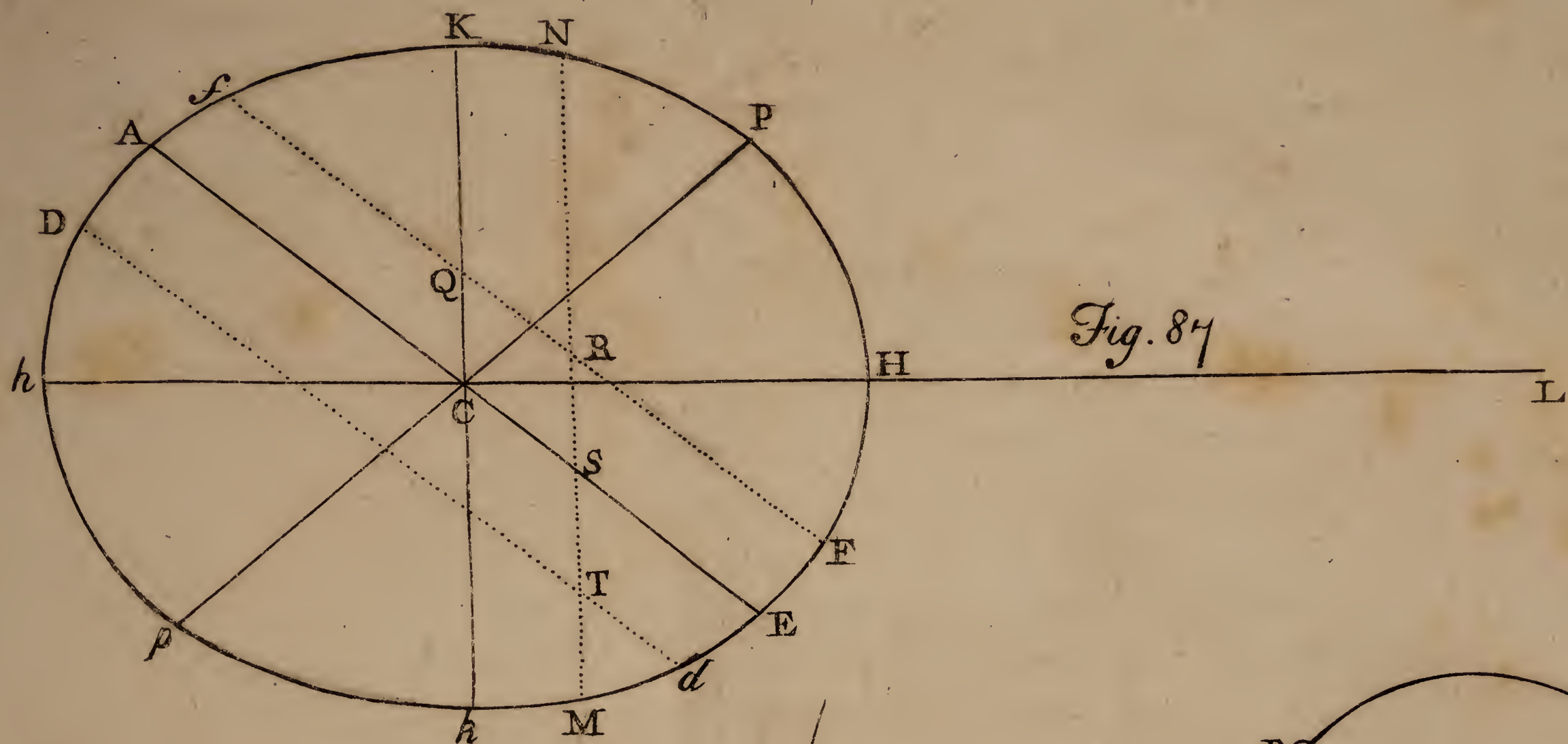


Fig. 87

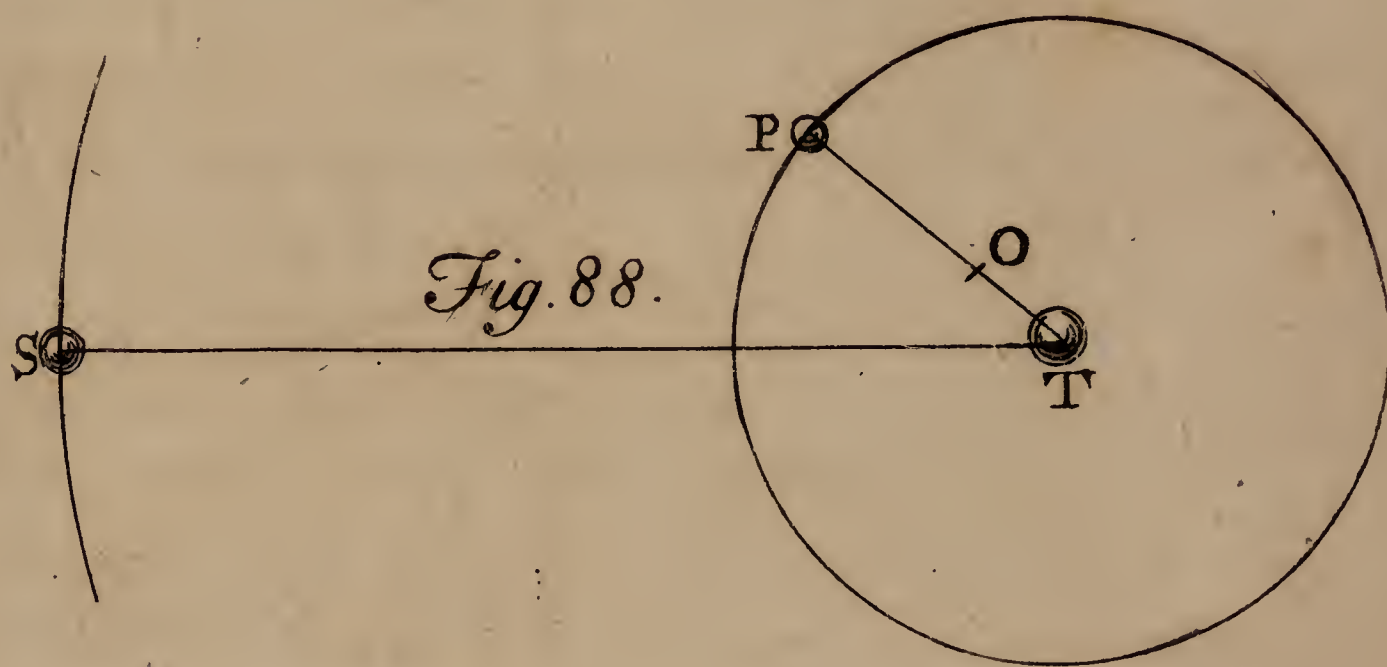


Fig. 88.

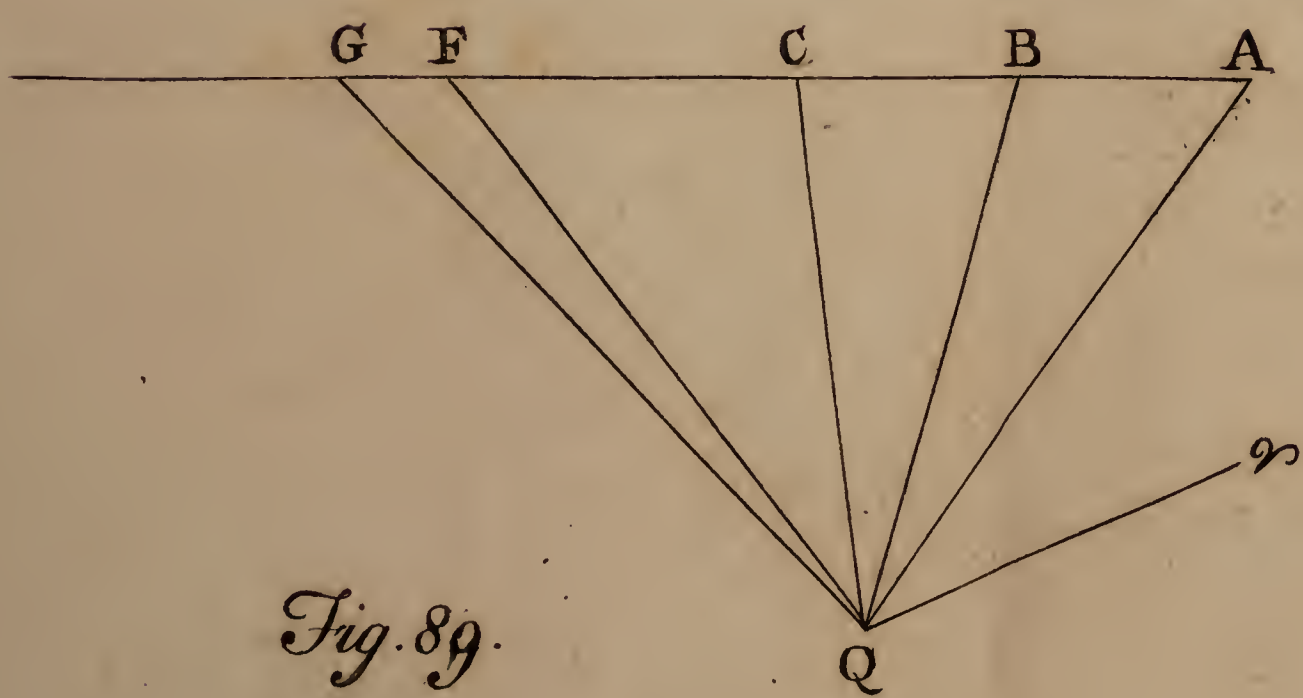


Fig. 89.

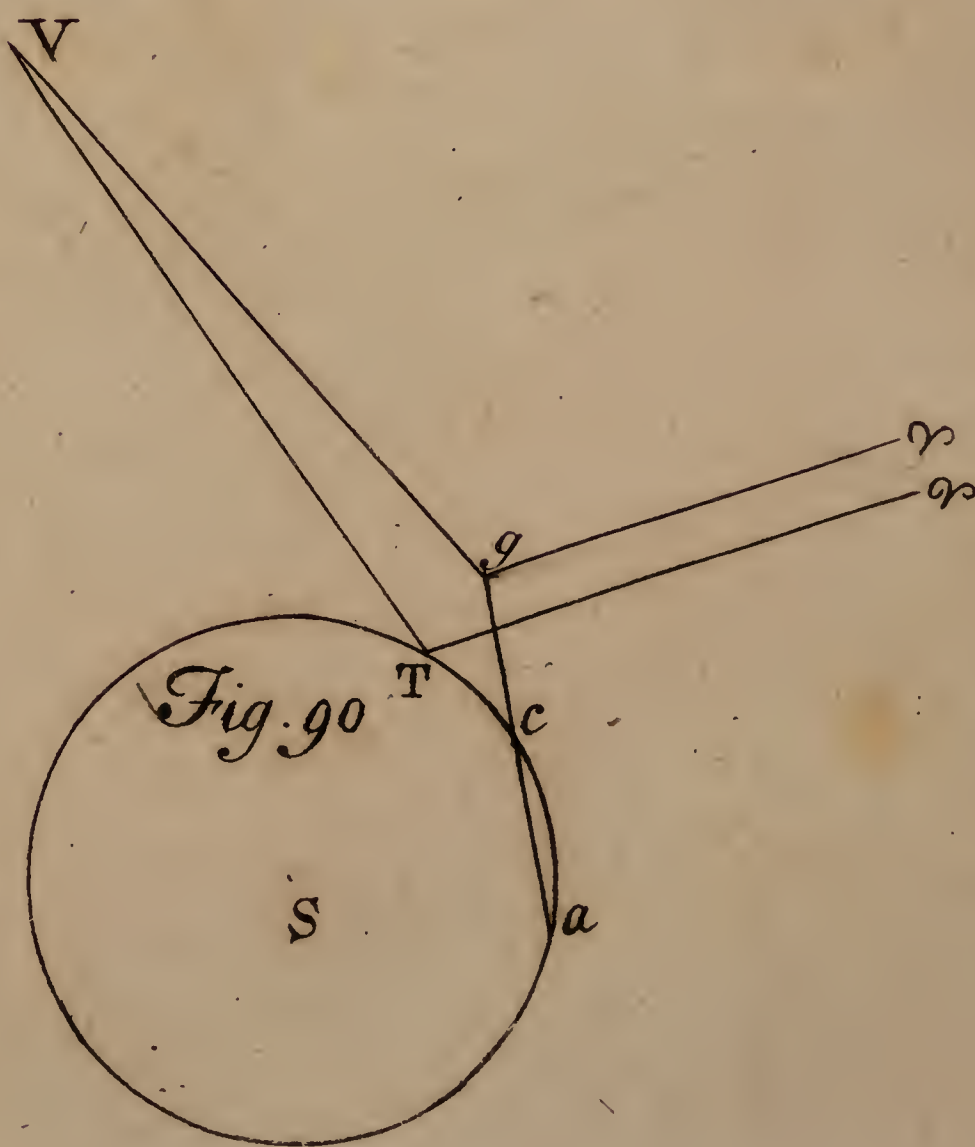


Fig. 90



jam certe, quoties caudam maximam et fulgentissimam emittit, jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a sole, ideoque erit soli multo propior. Quinetiam capita sub sole delitescunt, et caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittunt, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a terra solem versus, ac decrecente in eorum recessu a sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtektus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum 6'. 5" inclusa coma, at *Sept.* 2. esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618 circa medium mensis *Decembris*, et iste anni 1680 circa finem ejusdem mensis, celerrime movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; et splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magni-

SECTIO
SEXTA.

magnitudinis, et *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum; splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum et a *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum a sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 et 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissime motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut stella quartæ, *Jan.* 9. ut stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga solis maxime splenduerent, ex altera perigæi parte evanuerent. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia, concluditur magna solis et cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, et maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ luce solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra saturnum, deberent sæpius apparere in partibus soli oppositis. Forent enim terræ viciniore, qui in his partibus versarentur; et sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio solem versus, quam in hemisphærio opposito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso jove propriiores. Spatii autem tantillo intervallo circa solem descripti pars longe major sita est

est a latere terræ, quod solem respicit; inque parte illa majore cometæ, soli ut plurimum viciniore, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam cometæ vias obliquas et nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, et motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus planetarum sint, et motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; et atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic terra si e planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, et corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, et firmum jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris et profundioribus et crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO. XLI. THEOREMA. XXX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, et radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per corol. 1. prop. xv. collatum cum notâ (157).

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, et tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque cometæ maxima ex parte supra planetas versantes, et eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo major axe orbis saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis saturni, id est, ad annos 30, ut $4 \sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2.

SECTIO
SEXTA.

Corol. 2. Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. xviii) velocitas cometæ omnis, erit semper ad velocitatem planetæ cujuscvis circa solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiae planetæ a centro solis, ad distantiam cometæ a centro solis quamproxime. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in qua terra revolvitur semidiametrum maximam esse partium 100000000: et terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, et motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, et motu horario partes 101364 $\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum et horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, et quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singulis diebus describit, erit partium 1216373 $\frac{1}{2}$, et singulis horis area illa erit partium 50682 $\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna et horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

F I N I S.

For Chords & Diam^r of cir: Curve^s: Note. 56. 77, 81.

